目 录

第一章 函数、极限与连续

函数练习题

一、选择题

1.C　2.B　3.B　4.A　5.C　6.D　7.B

二、填空题

1. $(0,1]$；　2. $\cos^2 x$；　3. $y=\log_3(x+1)$；　4. $5x+\dfrac{2}{x^2}$

三、计算题

1.（1）$(-2,0)\cup(0,+\infty)$；　（2）$(-1,2]$；

（3）$[0,1)$；　（4）$[-6,1)$；

2.（1）奇函数　（2）非奇非偶函数　（3）偶函数　(4)偶函数

四、求下列函数值或表达式.

1.2，　0，　x^2+3x+2，　x^2-x .

2.0，　1，　2，　$f(-a)=\begin{cases}1-a, a\ge 0\\ 2^{-a}\ \ , a<0\end{cases}$

3. $f\left[f\left(x\right)\right]=\left[x^3\right]^3=x^9$;　$f\left[g\left(x\right)\right]=\left[2^x\right]^3=8^x$;

$g\left[f\left(x\right)\right]=2^{f(x)}=2^{x^3}$;$g\left[g\left(x\right)\right]=2^{g(x)}=2^{2^x}$

五、说明下列函数由哪些简单函数复合而成

（1）是由 $y=\sqrt{u}$，$u=3x-2$ 复合而成;

（2）是由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2\lg x-\lg 3$ 复合而成;

（3）是由 $y=\cos u$， $u=v^2, v=2x+1$ 复合而成；

（4）是由 $y=e^u$　$u=\arccos v, v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成；

（5）是由 $y=u^2$, $u=\arcsin v$, $v=\dfrac{x-1}{2}$ 复合而成；

（6）是由 $y=u^3$, $u=x^2+1$ 复合而成.

六、函数的应用.

1. $R=\left(500+\dfrac{5-P}{0.2}10\right)P=(750-50P)P$

2. $y=\begin{cases}0.3x & x\le 50\\ 15+0.45(x-50) & x>50\end{cases}$

极限基础练习题

一、求下列数列的极限

(1) $\frac{5}{2}$；　(2) $\frac{1}{2}$；　(3)) 0　(4) $\frac{1}{3}$

二、求下列函数的极限

(1) 2；　(2) $\frac{1}{6}$；　(3) $-\frac{1}{5}$；　(4) -2；

(5) $\frac{1}{2}$；　(6) 0；　(7) $\frac{2^{20}}{3^{30}}$；　(8) 1

(9) 1；　(10) $\frac{\sin 2}{4}$；　(11) $\frac{4}{3}$；　(12) $-\frac{1}{2}$；

(13) 0；　(14) 1；　(15) e^{-2}；　(16) e^{-6}；

(17) e^{2}　(18) e^{3}

三、解答题

1. -10. 提示：因为极限存在，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x+k\right)=4+6+k=0$

2. $a=0,b=2$. 提示：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+(b-1)x^2+2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+b-1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

3. $\frac{1}{2}$. 提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{ax^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{ax^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2a}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2a}=1$

4. $a=0,b=1,c$ 任意. 提示：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{ax^2+bx+c}}{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{ax^2+bx+c}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{ax+b+\frac{c}{x}}=1$

5. $\sqrt{3}$. 提示：$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{2x+1}=\sqrt{3}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(a+\ln x)=a$.

函数连续性练习题

一、选择题

1.B　　2.A　　3.D　　4.C

二、填空题.

1.1；　　2. $a=1, b=\frac{1}{2}$；　　3.第一类跳跃间断点

三、判断下列函数在在定义域的连续性.

（1）连续　　（2）连续

四、求下列函数的间断点并判别类型

（1）$x=-1$，第二类间断点

（2）$x=1$,第一类，$x=2$是第二类;；

（3）$x=k\pi,\pm1,\pm2,\cdots$是第二类，$x=0$是第一类；

（4）$x=1$；

五、解答题

1. $a=6$.

2. $a=0,1$. 提示：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(3x^2+2x+a)=a$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin a^2x}{x}=a^2$.

3. $a=b=e^{-1}$.

提示：$f(0)=a$，　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\sin\frac{1}{x}+b)=b$.

第一章综合测试 A

一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1-5 BBDDC 6-10 BCBCD

二、填空题 （每题 2 分，共 20 分）

1. $[0.1,100]$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. 2 4. $2,3$ 5. 8

6. e 7. 3 8. 1 9. $x=3$ 10. 3

三、计算题（每题 4 分，共 40 分）

1. $\sin 1$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{1}{7}$ 5. $\frac{1}{2}$

6. $\frac{3}{2}$ 7. $\frac{4}{3}$ 8. $\frac{1}{4}$ 9. e^2 10. -1

四、解答题 （每题 5 分，共 10 分）

1. $a=e^{-2}, b=e^{-2}-1.$

2. $a=0, b=-15$

第一章 自测题B

一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1-5 CBDBD 6-10 CDDBC

二、填空题（每 题 2 分，共 20 分）

1. $(-1,1)$ 2. $a=2,b=3$ 3. 3 4. e^4 5. $\frac{1}{2}$

6. $\frac{1}{4}$ 7. 3 8. 9 9. -2 10. $a=-5,b=6$

三、计算题（每题 4 分，共 40 分）

1. 8 2. $\frac{3}{2}$ 3. 2 4. $\frac{n}{m}$ 5. e

6. $\frac{1}{2}$ 7. $-\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$ 9. n 10. -1

四、解答题（每题 5 分，共 10 分）

1. $g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$D_g=(-\infty,0]$；

2. $f(x)=\frac{2-x}{x-1}, f(\frac{1}{2})=-3$.

第二章 一元函数微分学

第一部分 导数的概念（基础练习题）

一、选择题

1.D 2.D 3.B 4.A 5.B 6.C 7.C

8.A 9.A 10.A 11.C 12.C

二、填空题

1.-1 2.3

三、计算题

1.连续，可导，（提示：用定义验证分段点处是否左.右连续，是否左导数等于右导数）

2. $\frac{13}{16}$

第二部分 导数的计算（基础练习题）

一、选择题

1.C 2.A 3. A 4.D 5.B

二、计算题

1. $3x^2\arctan x+\frac{x^3}{1+x^2}$

2. $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}=\csc x$

3.求下列幂指函数的导数

（1） $y=(\ln x)^x=e^{\ln(\ln x)^x}=e^{x\ln(\ln x)}$

故 $y'=e^{x\ln(\ln x)}\cdot\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\cdot x\right)=(\ln x)^x\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]$

（2） $y=(1+x^2)^{\sin x}=e^{\sin x(\ln(1+x^2))}$

故

$$y'=e^{\sin x\ln(1+x^2)}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(1+x^2)+\sin x\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\right)=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(1+x^2)+\sin x\frac{2x}{1+x^2}\right]$$

4.（1）$y'=2x\cdot\arctan x+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$ $y''=2\arctan x+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}$

（2） $y'=e^{2x-1}\cdot 2$ $y''=4e^{2x-1}$ $y''(0)=4e^{-1}$

5.（1） $y=\tan(x+y)\Rightarrow y'=\sec^2(x+y)\cdot(1+y')$

$$\Rightarrow y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=\frac{1}{\cos^2(x+y)-1}=\frac{1}{-\sin^2(x+y)}=-\csc^2(x+y)$$

（2） $y=1+xe^{y} \Rightarrow y'=e^{y}+xe^{y}\cdot y' \Rightarrow y'=\dfrac{e^{y}}{1-xe^{y}}$

6. 解：方程两边对 x 求导得 $y+xy'-e^{x}+e^{y}y'=0$ （1）

整理得 $y'=\dfrac{e^{x}-y}{x+e^{y}}$

（1）式左右两边再对 x 求导，得 $y'+y'+xy''-e^{x}+e^{y}y'y'+e^{y}y''=0$ （2）

将 $x=0,y=0,y'(0)=1$ 代入（2）式得 $y''(0)=-2$

7.（1） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-1}{t}=-\dfrac{1}{t}$ $\qquad \dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}=\left(-\dfrac{1}{t}\right)'\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=t^{-2}\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{t^{3}}$

（2） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2e^{t}}{-3e^{-t}}=-\dfrac{2}{3}e^{2t}$ $\qquad \dfrac{d^{2}x}{dy^{2}}=\left(-\dfrac{2}{3}e^{2t}\right)'\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{4}{3}e^{2t}\cdot\dfrac{1}{-3e^{-t}}=\dfrac{4}{9}e^{3t}$

8. $y'=f'\left(x^{2}\right)\cdot 2x$ $\qquad y''=f''\left(x^{2}\right)\cdot 2x\cdot 2x+2f'\left(x^{2}\right)=4x^{2}f''\left(x^{2}\right)+2f'\left(x^{2}\right)$

9. $dy=\sqrt{49-x^{2}}dx$

10. $\sin\left(x^{2}+y\right)=x \Rightarrow \cos\left(x^{2}+y\right)\cdot\left(2x+y'\right)=1 \Rightarrow y'=\dfrac{1}{\cos\left(x^{2}+y\right)}-2x$

故 $dy=\left[\dfrac{1}{\cos\left(x^{2}+y\right)}-2x\right]dx=\dfrac{1-2x\cos\left(x^{2}+y\right)}{\cos\left(x^{2}+y\right)}dx$

第三部分 导数的应用（一）（基础练习题）

一、选择题

1.C

2.D $f(-1)=4 \quad f(3)=16 \quad f'(x)=4x-1$

则 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \Rightarrow 12=4(4\xi-1) \Rightarrow \xi=1$

3.B

4.B

二、填空题

1. $\xi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解：$f(0)=0 \quad f(1)=4$

$f'(x)=12x^2$，则 $4=12\xi^2 \Rightarrow \xi^2=\dfrac{1}{3}$ 又 $\xi\in[0,1]$ 故 $\xi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\cos x^2\cdot 2x}=1$

三、计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}-2x^{\frac{1}{2}}=0$

（3）$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=e^0=1$

（4） $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-1$

（5） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{6}=\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

第四部分 导数的应用（二）（基础练习题）

一、选择题

1-5 DBADB　　6-10 DDDBC

二、填空题

1.定义域 $1+x>0\Rightarrow x>-1$ 又 $y'=1-\dfrac{1}{1+x}$ 令 $y'=0\Rightarrow x=0$

当 $x<0$ 时 $y'<0$；当 $x>0$ 时 $y'>0$ 故在（-1，0]上单调减少，在[0，+∞）上单调增加.

2. $x=e^{-\frac{1}{2}}$，小

解析：$y'=2x\cdot\ln x+x^{2}\cdot\dfrac{1}{x}=2x\cdot\ln x+x$

令 $y'=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 又定义域为 x≠0 故在 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 处有极值

当 $x<e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$y'<0$．当 $x>e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$y'>0$ 故为极小值.

3. $a=-\dfrac{3}{2},b=\dfrac{9}{2}$

解析：$y'=3ax^{2}+2bx$　　$y''=6ax+2b$

令 $y''=0\Rightarrow 6ax+2b=0\Rightarrow 6ax+2b=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{3a}$

$\because(1,3)$为拐点　$\therefore -\dfrac{b}{3a}=1$ 又 $3=a+b\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2},b=\dfrac{9}{2}$

三、计算题

1.（1）定义域为$[0,+\infty)$

又 $y'=1+\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=1+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}>0$　　故$[0,+\infty)$为单调增区间.

（2）$y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^{2}}$ 令 $y'=0\Rightarrow x=e$ 定义域$(0,1)\cup(1,+\infty)$

当 $x\in(0,1)$ 时 $y'<0$；当 $x\in(1,e)$ 时 $y'<0$，当 $x\in[e,+\infty)$ 时，$y'>0$ 故单调减区间$(0,1)$

和$\left(1,e\right)$，单调增区间$[e,+\infty)$

2. $y'=-4x^3+4x$　令$y'=0\Rightarrow x=0$或$x=\pm 1$　则当$x=0$时，$y=0$为极小值，

当$x=\pm 1$时，y=1 为极大值

3. $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

令$y'=0\Rightarrow xe^{-x}\left(2-x\right)=0\Rightarrow x=0$ 或$x=2$

x	(-∞, 0)	0	(0, 2)	2	(2, +∞)
y′	—	0	+	0	—
y	单减	极小	单增	极大	单减

极小值$y\left(0\right)=0$，极大值$y\left(2\right)=4e^{-2}$

4. $y'=4x^3-16x$

解：令$y'=0$得 y 在[-1, 3]上的驻点为，$x_1=0,x_2=2$，由于

$y\left(-1\right)=-5,y\left(0\right)=2,y\left(2\right)-14,y\left(3\right)=11$

故最大值$y\left(3\right)=11$，最小值$y\left(2\right)=-14$.

5. (1)函数定义域为 R. $y'=e^{-x}-xe^{-x}$　　$y''=-e^{-x}+xe^{-x}-e^{-x}=e^{-x}\left(x-2\right)$　令

$y''=0$得 x=2

x	(-∞, 2)	2	(2, +∞)
y''	—	0	+
y	∩	连续	∪

故拐点$\left(2,2e^{-2}\right)$, 在$\left(-\infty,2\right)$凸，在$\left(2,+\infty\right)$凹

（2）函数定义域R $y'=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$ $y''=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

令 $y''=0$ 则 $x=\pm 1$

(—∞, 1)和(1,+∞)为凸区间，(-1,1）为凹区间 拐点 $(1,\ln 2),(-1,\ln 2)$

x	(—∞, —1)	—1	(—1, 1)	1	(1,+∞)
y''	—	0	+	0	—
x	∩	连续	∪	连续	∩

第五部分 导数的应用（三）

1. 解：设矩形长为a，宽为b,周长为c，面积为s

则$c=2(a+b), s=ab$ 则$s=a\left(\frac{c}{2}-a\right)$ $\left(0<a<\frac{c}{2}\right)$又$s'=\frac{c}{2}-2a$ 令$s'=0$得唯一驻点，$a=\frac{c}{4}$，又S为可导函数，且最大值一定存在，故当$a=\frac{c}{4}$时S最大，此时$s=\frac{c^2}{16}$，此时$a=b=\frac{c}{4}$，即为正方形时面积最大

2. 设扇形面积为S，弧长为L，周长为C则$S=\frac{L\cdot r}{2}$，$C=2r+L$ 则周长为：

$C=2r+\frac{2S}{r}=2r+\frac{50}{r}$ （0<r<+∞）

又$C'=2-50\frac{1}{r^2}$，令$C'=0\Rightarrow r=5$由于C为可导函数，且只有一个驻点，又最小值一定存在，故$r=5$时，C取最小值.

3. 设小屋的长和宽分别为a和b，面积为S，则$a+2b=20, S=ab\Rightarrow S=a\frac{20-a}{2}$

又$S'=0$得a=10，由驻点的唯一性及问题的实际意义知，当a=10时S最大，此时b=5.

4. $C'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，　$R'(x)=\frac{5}{(x+1)^2}$，　$L'(x)=\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

5. $50-\frac{1}{8}Q$.

6. $L'(Q)=60-0.2Q$ ，　$L'(150)=30$经济意义：销量为150时再增加一个单位的销量利润增加30，　$L'(400)=-20$经济意义：销量为400时再增加一个单位的销量利润减少20.

7. $\frac{P}{50-P}$.

8. $\frac{P}{4}$；$\frac{3}{4}$，1，$\frac{5}{4}$.

9. 日总成本函数 $C(Q)=16Q+150, 0\le Q\le 200$，日平均成本函数

$\bar{C}(Q)=16+\frac{150}{Q}, 0\le Q\le 200$。

10. $R=PQ=(24-2Q)Q$

第二章自测题 A

一、选择题(每题 2 分，共 20 分)

1-5 DADCA　　6-10 BCDAC

二、填空题(每题 2 分，共 20 分)

1. -2

2. $y' = 2^{x+1}x + x^2 2^x \ln 2$

3. $n!$

4. $[e^x \sin(x^2+1) + 2xe^x \cos(x^2+1)]dx$

5. $-2A$

6. $\dfrac{e^{x+y}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} - e^{x+y}}$

7. 2

8. $\lambda > 2$

9. $\dfrac{1}{2}$

10. $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$

三、计算题(每题 4 分，共 40 分)

1. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

2. $\dfrac{1}{x\ln x}dx$

3. $\dfrac{3}{2(2-3x)\sqrt{1-3x}}$

4. $\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

5. $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$

6. $\frac{-1}{1+x^2}$

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{x+e^y}$

8. $\boldsymbol{e^{-2}}$

9. $\frac{2}{\left(1+t^2\right)\left(2\sin t+t\cos t\right)}$.

10. $-\frac{1}{2}$

四、综合题(每题 5 分，共 20 分)

1. 凸区间为$\left(-2,-1\right)$；凹区间为$\left(-\infty,-2\right)$和$\left(-1,+\infty\right)$.

2. $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{8}$

3. （数一） 底半径$r=\sqrt[3]{\frac{V}{5\pi}}$，桶高为$h=5r$，即桶高与底半径之比为$5:1$

（数二） 6.5

4. $x+y=2$

第二章自测题 B

一、选择题(每题 2 分，共 20 分)

1-5 B C B C B 6-10 C B A A C

二、填空题(每题 2 分，共 20 分)

1. $(2,5)$

2. $y' = -2x\sin(x^2)$

3. $y' = -f'(-x)$

4. $4h$

5. $f'(x_0) = \frac{-2x_0}{1+x_0^4}$

6. 2013!

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1-xe^y} = \frac{e^y}{2-y}$

8. $\frac{\pi}{2}$ （数一） $x=1$

9. $\frac{1}{2}$

10. $y' = \frac{1-\sin t}{1+\cos t}$

三、综合题（每题 4 分，共 40 分 ）

1. $\frac{3}{25}$

2. $-e^{1-3x}(3\cos x + \sin x)$

3. $\boldsymbol{-2e^{\frac{\pi}{4}}}$

4. $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$

5. $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

6. $n!$

7. $\dfrac{y}{x(y-1)}$

8. -2

9. $-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

10. $\dfrac{1}{2}$

四、综合题(每题 5 分，共 20 分)

1. 在$(0,+\infty)$单调增加；在$(-1,0)$单调递减.

2. $f'_+(0)=0$，$f'_-(0)=-1$，故$f'(0)$不存在

3.（数一） 解：由圆的半径为r得矩形部分的宽为$2r$，高为$\dfrac{1}{2}(L-\pi r-2r)$。

其面积$s=\dfrac{1}{2}\pi r^2+2r\cdot\dfrac{1}{2}(L-\pi r-2r)=Lr-\dfrac{\pi}{2}r^2-2r^2(r>0)$，

令$\dfrac{ds}{dr}=0$得$L-\pi r-4r=0$得驻点$r_0=\dfrac{L}{\pi+4}$，又当$0<r<r_0$时，$\dfrac{ds}{dr}>0$；

当$r>r_0$ 时$\dfrac{ds}{dr}<0$。故当半径$r=\dfrac{L}{\pi+4}$时所求面积最大.

（数二）250 .

4. 切线方程$x+4y=6$，法线方程$4x-y=7$

第二章自测题 C

一、选择题(每题 2 分，共 20 分)

1-5 CDCCD 6-10 CBBBD

三、填空题(每题 2 分，共 20 分)

1. 2x

2. -648

3. $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$

4. $\frac{2}{3}$

5. 极大值 $y(0)=1$

6. $-\frac{1}{8}$

7. $y''=2xe^{x^2}(3+2x^2)$

8. $(-1,1)$

9. $x=1$

四、综合题（每题 4 分，共 40 分 ）

1. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$

2. $y'=\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$

3. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

4. $e^{-x}\left(-x^2+4x-5\right)$

5. $\begin{cases}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},-1<x<0\\-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},0<x<1\end{cases}$

6. $\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$

7. $\dfrac{2}{2-\cos y}$

8. $-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$

9. $\dfrac{1}{2a^2\cos^6 t}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})^{2x^2}$=e^2

四、综合题(每题 5 分，共 20 分)

1. 单调增加区间为$(-\infty,-2)$和$(1,+\infty)$，单调减少区间为$(-2,1)$

2. $f_-'(0)=1, f_+'(0)=0$，故$f'(0)$不存在

3. （数一）$\dfrac{a}{6}$，（数二）140

4. $2x+y-3=0$ 切线两条

第二章加强训练

一、计算题

1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{2}$

3. 解：对方程两边求微分，得 $d(e^{xy})=d(2x+y^3)$,

$$e^{xy}d(xy)=d(2x)+d(y^3),\quad e^{xy}(ydx+xdy)=2dx+3y^2dy, \text{于是}\quad dy=\frac{2-ye^{xy}}{xe^{xy}-3y^2}dx.$$

4. 极小值为 $f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$.

5. 单调增加区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(1,+\infty)$，单调减少区间为 $(-2,1)$

6. $(-1,\ln 2),(1,\ln 2)$

7. $(1,-3)$.

8. 凹区间为 $(1,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$，拐点为 $(1,4.6)$.

9. $-\sqrt{2}$

10. $\frac{1}{1+x^2}$

11. 水平渐近线为 $y=-2$，垂直渐近线为 $x=0$

12. $y'=\sin 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right]$

$$y''=2\cos 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right]+\sin^2 2x\left[f''(\sin^2 x)+f''(\cos^2 x)\right]$$

13. 底半径为 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，高 $h=2r$

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. 140

16. 2.08

17. 解：（1）总成本函数 $C(P)=200+5Q=200+5(100-2P)=700-10P$；

总收益函数 $R(P)=PQ=P(100-2P)=100P-2P^2$.

（2）总利润函数 $L(P)=R(P)-C(P)=-2P^2+110P-700$，令 $L'(P)=0$

$-4P+110=0, P=27.5$.

因 $L''(P)=-4<0$，所以当 $P=27.5$ 时总利润最大，此时产量为 $Q=100-2\times27.5=45$（百元）.

18. 利润函数为 $L(x)=R(x)-C(x)=px-C(x)=-2x^2+980x-5000$

则边际利润为 $L'(x)=-4x+980$ 由此计算得

$L'(240)=20$, $L'(245)=0$, $L'(250)=-20$

$L'(240)=20$ 的经济意义是，当销售量为 240 个单位时，再多销售 1 个单位产品，利润将增加 20 个单位；而 $L'(250)=-20$ ，则表明，当销售量为 250 个单位时，再多销售 1 个单位产品，利润将减少 20 个单位；$L'(245)=0$ 表明，当销售量达到 245 个单位时，利润达到最大值，再增加或减少销售量，利润均会减少.

19. 底半径 $\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$ 米，高为底半径的 2 倍.

第三章 一元函数积分学

3.1 不定积分

一、选择题

1.D　　2.C　　3.D　　4.C　　5.D　　6.A

二、填空题

1. $\dfrac{x}{\ln x}dx$　　　　2. $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}+C$

三、计算题下列不定积分

1. $\int\dfrac{(x-1)^2}{x^2}dx=\int\dfrac{x^2+1-2x}{x^2}dx=\int\left(1+x^{-2}-2x^{-1}\right)dx=x-x^{-1}-2\ln|x|+C$

2. $\int\sin^2\dfrac{x}{2}dx=\int\dfrac{1-\cos x}{2}dx=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin x+C$

3. 原式 $=\int\dfrac{1}{(\frac{\sin x}{2})^2}dx=\int 4\csc^2 x dx=-4\cot x+C$

4. $\int\dfrac{1+2x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}=\int\dfrac{2x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\int\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx=-\dfrac{1}{x}+\arctan x+C$

5. $\int\dfrac{x^3-x}{x+1}dx=\int\dfrac{x(x+1)(x-1)}{x+1}dx=\int\left(x^2-x\right)dx=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+C$

6. $\int\dfrac{3^{x+1}-5\cdot 2^x}{3^x}dx=\int\left(3-5\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right)dx=3x-\dfrac{5}{\ln 2-\ln 3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+C$

7. $\int e^{x-4}dx=\int e^{x-4}d(x-4)=e^{x-4}+C$

8. $\int 2^x e^x dx=\int(2e)^x dx=\dfrac{(2e)^x}{1+\ln 2}+C$

9. $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+C$

10. $x-\arctan x+C$

11. $-\cot x-x+C$

12. $\sin x-\cos x+C$

13. $-(\cot x+\tan x)+C$

14. $\frac{1}{2}\tan x+\frac{x}{2}+C$

3.2 不定积分计算（凑微分 换元法 分部积分 有理式积分）

一、选择题

1.B　2.B　3.D　4.A　5.C　6.C　7.C　8.B

二、计算下列不定积分

1. $\dfrac{2^{3x}}{3\ln 2}+C$

2. $-\dfrac{2}{7}(2-x)^{\frac{7}{2}}+C$

3. $2\sqrt{\sin\theta}+C$

4. $-\left(2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$

5. $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C$

6. $\ln\left|\ln x\right|+C$

7. $e^{\sin x}+C$

8. $\dfrac{n}{n+m}y^{\frac{n+m}{n}}+C$

9. $-e^{\frac{1}{x}}+C$

10. $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{1}{e^{2x}+1}de^x=\arctan e^x+C$

11. $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}d\left(\sin x-\cos x\right)=\frac{3}{2}\left(\sin x-\cos x\right)^{\frac{2}{3}}+C$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{4-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2-2^2}=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

13. $\displaystyle\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}dx=2\int\frac{\arctan t}{1+t^2}dt=2\int\arctan t\,d\arctan t=2\cdot\frac{1}{2}\left(\arctan t\right)^2+C$

则 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \left(\arctan\sqrt{x}\right)^2 + C$

14. $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx = \int \frac{1}{(x\ln x)^2}d(x\ln x) = -\frac{1}{x\ln x} + C$

15. $\frac{1}{2}\ln|1+2t| + C$

16. $\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}x + C$

17. $\ln|\sin x| + C$

18. $-\frac{1}{5}e^{-5x} + C$

19. $\arctan e^t + C$

20. $k \neq -1, \frac{1}{a}\frac{1}{(k+1)}(ax-b)^{k+1} + C$ $\quad k=-1, \frac{1}{a}\ln|ax-b| + C$

21. $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

22. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$

23. $\sin e^x + C$

24. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

25.. $\frac{1}{5}\arcsin 5x + C$

26. $\frac{1}{6}\arctan\frac{3}{2}x + C$

27. $2\left(\sqrt{x-1} - \arctan\sqrt{x-1}\right) + C$

28. $\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2+4}) + C$

29. $\arcsin\frac{x}{4}+C$

30. $\arctan(\sin x)+C$

31. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{2}}+C$

32. $\frac{1}{3}(\arctan x)^3+C$

33. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

34. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$

35. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$

36. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

37. $\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

38. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

39. $\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C$

40. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan x+C$

41. $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

42. $2\sin\sqrt{t}+C$

43. $-e^{-x}(x+1)+C$

44. $-\frac{\ln x}{x}+C$

45. $x(\ln x-1)+C$

46. $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\arctan x+C$

三、解答题

1. 令 $\sin^2 x = t$ 则 cos2x=1－2t $\tan^2 x = \frac{t}{1-t}$ 则 $f'(t) = 1-2t+\frac{t}{1-t}$

则 $f'(x) = 1-2x+\frac{x}{1-x}$ $f(x) = -\ln|1-x| - x^2 + C$

2. 令 $F(x) = (1+\sin x)\ln x$，则由题意知

$f(x) = \cos x \ln x + \frac{1+\sin x}{x}$

$\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = x.f(x) - \int f(x)dx = xf(x) - F(x) + c$

所以原式 $= x\cos x\ln x + \sin x - (1+\sin x)\ln x + C$

3.3 定积分概念

一、选择题

1.C　　2.C　　3.B　　4.C

二、计算题

1.求解下列各题

（1）0　　（2）0　　（3）$f(x)$

（4）$\dfrac{d\int_a^x f(x)dt}{dx}=\dfrac{df(x)\int dt}{dx}=\dfrac{df(x)(x-a)}{dx}=f(x)+(x-a)f'(x)$

2.求极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^4\cdot 2x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x^4=1$

（2）

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

（3）$\dfrac{1}{2}$　　（4）$\dfrac{1}{2}$　　（5）$\dfrac{1}{2}$

3.利用函数的奇偶性计算下列积分

（1）$f(x)$为奇函数，则$\int_{-5}^{5}f(x)dx=0$

（2）对称区间 整体是非奇非偶函数，拆开看

$$\int_{-1}^{1}[(e^x-e^{-x})\cos x+x^2]dx=\int_{-1}^{1}[(e^x-e^{-x})\cos x+x^2]dx=2\int_0^1x^2dx=\frac{2}{3}$$

4. $\frac{dx}{dt}=\frac{d\int_0^t \sin u^2 du}{dt}=\sin t^2$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d\int_0^t \cos u^2 du}{dt}=\cos t^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\cos t^2}{\sin t^2}=\cot t^2$$

3.4 定积分计算（换元法，分部积分法）

一、计算下列各题

1. $-\dfrac{79}{4}$　　2. $\dfrac{\pi}{6}$　　3. -2

4. $\dfrac{\pi}{12a}$　　5. $\dfrac{\pi}{6}$　　6. $\dfrac{29}{2}$

7. $\dfrac{\pi}{4}+1$　　8. 2　　9. $\dfrac{40}{3}$

10. $\dfrac{4}{3}$　　11. $\pi-\dfrac{4}{3}$　　12. $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

13. 1　　14. $\dfrac{1}{2}\ln 2$　　15. $\dfrac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$

16. $\dfrac{1}{4}(\pi-2)$　　17. $\dfrac{\pi}{2}$　　18. 4

19. $\dfrac{16}{3}$　　20. $\dfrac{1}{2}(e^{2}-1)$　　21. $\dfrac{3}{2}$

22. $\dfrac{1}{2}\left(25-\ln 26\right)$　　23. $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　24. $2\left(2-\arctan 2\right)$

25. $2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

26.

$$\int_0^{\pi}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta=\int_0^{\pi}d\theta-\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\pi+\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\cos\theta=\pi+\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)d\cos\theta$$

$$=\pi-2-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}$$

27.

$$\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int_{-2}^{0}\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2+1}=\arctan\left(x+1\right)\Big|_{-2}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

28. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x\left(1-\cos^2 x\right)}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\left|\sin x\right|dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}d\cos x=\frac{4}{3}$$

29. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}-\frac{-\sin t}{\cos^2 t}\cdot\sin tdt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan^2 tdt$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(\sec^2 t-1\right)dt=\left(\tan t-t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=1-\frac{\pi}{4}$$

30.

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 t}d\sin t=-\frac{1}{\sin t}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}$$

3.5 无穷区间上的广义积分

一、选择题

1.D（把积分算出来）

2.A

二、计算题

1.判别下列各广义积分的收敛性，如果收敛，则计算其值

（1）$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx=-\frac{1}{3x^3}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{3}$ 收敛

（2）$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_{1}^{+\infty}$ 发散

（3）$\int_{0}^{+\infty}e^{kt}\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{k-p}\int_{0}^{+\infty}e^{(k-p)t}d(k-p)t\ \frac{e^{(k-p)t}}{k-p}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{-1}{k-p}$

（4）

$$\int_{1}^{+\infty}e^{-pt}\sin wtdt=\int_{1}^{+\infty}-\frac{1}{p}\sin wtde^{-pt}=-\frac{1}{p}(\sin wte^{-pt}\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\cdot w\cdot\cos wtdt)$$

$$=-\frac{w}{p^2}\int_{0}^{+\infty}\cos wtde^{-pt}=-\frac{w}{p^2}\left(\cos wt\cdot e^{-pt}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\cdot w\sin wtdt\right)$$

$$=\frac{w}{p^2}-\frac{w^2}{p^2}\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\sin wtdt\Rightarrow\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}\sin wtdt=\frac{w}{p^2+w^2}$$（回头积分）

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}\right)^x=\frac{e^c}{e^{-c}}=e^{2c}$

$$\int_{-\infty}^{c} te^{2t}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{c} tde^{2t} = \frac{1}{2}te^{2t}\Bigg|_{-\infty}^{c} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{c} e^{2t}dt = \frac{c}{2}e^{2c} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2t}\Bigg|_{-\infty}^{c} = \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2c}$$

$$\therefore e^{2c} = \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2c} \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

3.6 定积分的几何应用

一、选择题

1.C

二、计算题

1. $A=\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2$

2.. $y'=-2x+4$ 则在$\left(0,-3\right)$与$\left(3,0\right)$处的切线的斜率为 4 和－2 则这两切线分别为

$4x-3=y$，　　$-2x+6=y$，两直线焦点为$\left(\frac{3}{2},3\right)$　则

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(4x-3+x^2-4x+3\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(-2x+6+x^2-4x+3\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x-3\right)^2dx=\frac{9}{4}$$

3. $y^2=2px$ 在点$\left(\frac{p}{2},p\right)$处的切线斜率为$y'=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}=1$则法线斜率为-1，则法线方程为

$-x+\frac{3}{2}p=y$

$\Rightarrow\begin{cases}-x+\frac{3}{2}p=y\\ y^2=2px\end{cases}\Rightarrow$发现与抛物线的交点为$\left(\frac{p}{2},p\right)\left(\frac{9}{2}p,-3p\right)$则

$$A=\int_0^{\frac{p}{2}}2\sqrt{2px}dx+\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{9p}{2}}\left(-x+\frac{3}{2}p+\sqrt{2px}\right)dx=\frac{16}{3}p^2$$

4.结果为空心体积，用外侧体积减去内侧体积即可，

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(e^x\right)^2-\left(e^{-x}\right)^2\right]dx=\frac{1}{2}\pi\left(e^2+e^{-2}\right)-\pi$$

5. $S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$

6. $S=\int_1^2(x-\frac{1}{x})dx=\frac{3}{2}-\ln 2$

7. $S=\int_0^1(x^2-2x-2)dx=\frac{1}{12}$

8. $V=\pi\int_0^1(x^4-x)dx=\frac{3}{10}\pi$

9. $V=\pi\int_0^2 x^6dx=\frac{128\pi}{7}$

10. $A=\frac{4}{3},V_x=\frac{64}{15}\pi,V_y=\frac{8}{3}\pi$.

第三章自测题 A

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1.D 2.C 3.C 4.D 5.B 6.C 7.A 8.D 9.B 10.D

二、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $\frac{1}{2013a}(ax+b)^{2013}+C$

2. 1

3. 0

4. e^x-e

5. $-\sin x+cx+c_1$

6. $\frac{1}{2}$

7. $\frac{1}{2x^2+2x+1}$

8. $\frac{1}{2}(e^2-1)$

9. $f(x)+f(-x)$

10. 1

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=3x^2-x\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$

解：令 $\int_0^1 f(x)dx=A$

两边积分 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 3x^2dx-\int_0^1 xAdx$

解得 $\int_0^1 3x^2dx-A\int_0^1 xdx=A$，即得 $A=\frac{2}{3}$， 得 $f(x)=3x^2-\frac{2}{3}x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2} \\ -1, & x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$，求 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$.

解：$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx \overset{x-1=t}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} te^{t^2}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dt = -\frac{1}{2}$

3.解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x(x-\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{(1-\cos x)} = 12$$

4..解：$\int [x+f(x)]f'(x)dx = \int xf'(x)dx + \int f(x)f'(x)dx$

$$= \int xdf(x) + \int f(x)df(x) = xf(x) - \int f(x)dx + \frac{1}{2}[f(x)]^2$$

$$= x^2\cos x + \frac{1}{2}x^2\cos^2 x - \cos x - x\sin x + c$$

第三章自测题 B

一、　**选择题**（每题 3 分，共 30 分）

1.C　2.C　3.C　4.C　5.D　6.A　7.D　8.B　9.A　10.C

三、**填空题**（每题 3 分，共 30 分）

1. 0

2. $\ln\left|1+e^x\right|+C$

3. 5

4. $\ln\left|\cos x+\sin x\right|+C$

5. $(1-\frac{2}{x})e^x+C$

6. $\int_1^{x^2}\sin tdt+2x^2\sin x^2$

7. $p<-1$

8. $\frac{1}{2}\left[f\left(2b\right)-f\left(2a\right)\right]$

9. $-2,3$

10. $2-6e^{-2}$

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

1. 设 $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f\left(x\right)dx$，求 $\int_0^1 f\left(x\right)dx$.

解：令 $\int_0^1 f(x)dx=A$

两边积分 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1 x^3Adx$

解得 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+A\int_0^1 x^3dx=A$，即得 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{3}$　.

2. 解 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)dx\overset{x-1=t}{=}\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}t\sin t^2dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 xdt=\frac{3}{8}$

3. 解求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(e^y+\sin y-1\right)dy}{x\ln\left(1+x\right)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^y+\sin y-1)dy}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+\sin x-1)}{2x}=1$$

4. 解：$x\sin x+\cos x+\dfrac{1}{2}xe^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}+C$

第三章加强训练答案

一、解答题

1. 1

2. $\frac{7\pi^2}{288}$

3. 2

4. $\frac{14}{3}$

5. $2(1-\frac{\pi}{4})$,

6. $-\frac{\cos x}{e^y}$

7. $2e^2+2$

8. e

9. $\ln 2$

10. $2\sqrt{x+1}-6\ln(\sqrt{x+1}+3)+C$.

11. $\frac{5}{2}-\frac{1}{e}$.

第四章 向量与空间解析几何（数一）

4.1 数量积与向量积

一、选择题

1. D　2. A　3. D　4. B

二、填空题

1. 2，$i-j-2k$

2. $\sqrt{3}$

三、计算（或判断）题

1. 解：(1) $\vec{a}$ 垂直于 $\vec{b}$，$2\vec{a}\cdot 3\vec{b}=0$，$\left|\vec{a}\times\left(-2\vec{b}\right)\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|-2\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$

(2) $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，$\left|2\vec{a}\times 3\vec{b}\right|=6\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\vec{b}\right)=0$，$a\times b=0$

2. 解：$\because \cos^2\dfrac{6\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}\neq 1,\therefore$ 不存在。

3. 解: $2a=6i+10j-2k$，$2a-3b+4c=16i-23k$，$a\cdot a=35$

4. 解：$\left|a\right|=6,\left|b\right|=7$ (1) $a\cdot b=22$ (2) $a.a=36$

(3) $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=3\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{a}+9\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{b}=-32$

5. 解：$\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-k\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2-k^2\left|\vec{b}\right|^2=0$ 则 $k^2=\dfrac{9}{25}\Rightarrow k=\pm\dfrac{3}{5}$

4.2 平面方程与空间直线方程

一、选择题

1.A　2,C　3.C　4.A　　5.C　6.A

二、填空题

1. $3x+2y+4z=6$　　2. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$　　3. $\frac{3}{4}$

三、计算题

1.解：设平面方程为 $ax+by+cz+d=0$ 则 $\begin{cases} b+2c+d=0 \\ -a+2b+2c+d=0 \\ a-b+4c+d=0 \end{cases}$

解得 $a=2c, b=2c, d=4c$，所以平面方程为 $2x+2y+z-4=0$

2.解：　垂直于 x 轴，则平面方程为 $x=k$，又过 $(1,-2,4)$ 则　$x=1$

3.解：设平面法向量为 $\vec{n}$

$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$　又过点（1,0,-1）则 $(x-1)+y-3(z+1)=0 \Rightarrow x+y-3z=4$

4.解：L_1 的方向向量 $\vec{S}$ =（1，-4，1），L_2 的方向向量 $\vec{S_1}$ =（1，-4，1）

则 $\cos\varphi=\frac{|2+8-1|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　则 $\varphi=\frac{\pi}{4}$

5.解：　将直线写成参数方程 $x=2+t, y=3+t, z=2t+4$，代入平面方程得 $t=-1$，

所以 交点即为 （1,2,2）

6.解：　$\overrightarrow{n_1}=(2,3,4)$　　$\overrightarrow{n_2}=(2,-3,4)$　　π_1 与 π_2 的夹角为 θ

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{11}{29}$　故 $\theta=\arccos\frac{11}{29}$，故两平面相交但不是垂直相交

7.（1）平行（2）垂直（3）直线在平面上

8. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=z-1$

9. $\pi_0:3x+2y-2\sqrt{3}z-2\pm 5\pi=0$

10. $\frac{x-2}{26}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-34}$

4.3 二次曲面答案

一、选择题

1.C　　2.C

二、解：$2x^2+2y^2+2z^2-4x-4y=8$

$x^2+y^2+z^2-2x-2y=4\Rightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)+z^2=6$

$\Rightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+z^2=6$ 故球心（1，1，0），半径为$\sqrt{6}$

三、（1）旋转抛物面

（2）球面

（3）底面半径为a的柱面

（4）锥面

（5）椭球面

（6）椭球面

四、$2x=\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 即$4x^2-y^2-z^2=0$　　以ox为轴的锥面

第四章测试卷 A

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1-5 CBCBD 6-10 BDCDC

二、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1.18

2. $\frac{\pi}{2}$

3. $(1,0,-1)$,

4. $x-2y+5z-9=0$

5. $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=-z$

6. $m=-1,\lambda=1$

7. $11x+2y-5z=0$

三、解答题

1.（1）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标表示$\left(-3,6,2\right)$

（2）向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模 7

2.（1）$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{0}$；（2）$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{3}$.

3. $3x-y+2z-4=0$

4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$

5.（1）$l=7,m=-2$；（2）$m=0$

6. $x-2y-z+1=0$

第四章测试卷 B

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1-5 DAAB C　　　　6-10 DADCD

二、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. -9

2. 96

3. $y-z=0$

4. $y-z+3=0$

5. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$

6. $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

7. $\frac{x-2}{34}=\frac{y}{-19}=\frac{z+6}{13}$

三、解答题（每题 3 分，共 21 分）

1.（1） 2；

（2） -219；

（3） $\mathrm{Prj}_{a}\boldsymbol{b}=\frac{2}{\sqrt{5}}$；

（4） $\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{2}{\sqrt{130}}$

2. (1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{1}$；　　(2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{\sqrt{2}}=\frac{z+4}{-1}$；

3. $y-2=0$

4. $k=\frac{3}{2}$

5. (1)平行；　(2)垂直；　(3)直线在平面上.

6. $2x+y-1=0$

第五章 多元函数微分学

5.1 多元函数的概念

一、选择题

1.D

二、计算题

1.（1）$\left\{(x,y)\middle|y^2-2x+1>0\right\}$

（2）$y\geq 0\quad x-\sqrt{y}\geq 0\Rightarrow\left\{(x,y)\middle|x\geq 0,y\geq 0,x^2\geq y\right\}$

（3）$\left\{(x,y)\middle|x>y\cup x>-y\right\}$

（4）$y-x>0,x\geq 0,1-x^2-y^2>0\Rightarrow\left\{(x,y)\middle|y-x>0,x\geq 0,x^2+y^2<1\right\}$

2. $f(1,0)=0\quad f(x+y,xy)=(x+y)^2\cdot xy+(xy)^2=xy\left(x^2+y^2+3xy\right)$

3. 令 $x+y=m,x-y=n\Rightarrow x=\dfrac{m+n}{2},y=\dfrac{m-n}{2}$

$\therefore f(x+y,x-y)=f(m,n)=\dfrac{m+n}{2}\cdot\dfrac{m+n}{2}+\left(\dfrac{m-n}{2}\right)^2=\dfrac{m(m-n)}{2}$ 故

$f(x,y)=\dfrac{x(x-y)}{2}$.

5.2 偏导数与全微分

一、选择题

1-5 BDDBA 6-10 CDBAD

二、计算题

1.（1）$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$

（2）$z=\sqrt{\ln(xy)}$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln xy}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln xy}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln xy}}$

（3）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)\cdot(-\sin(xy)y)=y(\cos(xy)-2\cos(xy)\sin(xy))=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$$

（4）$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

2. $\frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{1}{y-z}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-(y-z)-(x-y)}{(y-z)^2}=\frac{z-x}{(y-z)^2}$ $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x-y}{(y-z)^2}$ 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$$

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$ $\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-16xy$

4. $Z=e^{-kn^2t}\sin(nx)$ $\frac{\partial z}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin(nx)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-kn^2t}\cos(nx)\cdot n \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-n^2e^{-kn^2t}\sin(nx) \text{ 故 } \frac{\partial z}{\partial x}=k\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

5. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{1}{2}y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}=\frac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

则 $dz=-\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$

6. $dz=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}dy,$

$$dz=\frac{2x}{1=x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy,dz\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$$

7. 两边同时对 x 求导得

$$\cos y\cdot y'+e^x-\left(y^2+2xy\cdot y'\right)=0\Rightarrow y'=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$$

8. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2y^2}\cdot\left(xe^x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2y^2}\left(y+x\cdot e^x\right)=\dfrac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot\left(y-\dfrac{y}{x^2}\right) \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

10. $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cdot\cos t-2e^{x-2y}\cdot 3t^2=e^{\sin t-2t^3}\left(\cos t-6t^2\right)$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2' \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$

12. 证：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+F'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot x=y+F(u)-\dfrac{y}{x^2}\cdot x\cdot F'(u) \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\dfrac{1}{x}=x+F'(u)$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xF\left(u\right)-yF'(u)+xy+yF'(u)=2xy+xF\left(u\right)=z+xy$$

13. 令 $x+y+z=S$，$x-y=t$　　则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x}=f_1'+f_2'$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=f_1'-f_2' \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=f_1'$$

14. 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+3xyz^2+2z-1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x+3yz^2}{6xyz+2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y+3xz^2}{6xyz+2}$$

15. 两边同时对 x 求偏导：　$2xz+x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y^2\cdot 2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$　则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2xz}{x^2+4zy^2}$

两边同时对 y 求偏导：$x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+4y\cdot z^2+2y^2\cdot 2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+1=0$　则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4yz^2+1}{x^2+4zy^2}$

16. 设 $F(x,y,z)=x-z(\ln z-\ln y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{z}{x+z}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{z_x'(x+z)-z(1+z_x')}{(x+z)^2}=\frac{-z^2}{(x+z)^3}$$

5.3 偏导数应用

一、选择题

1.A **2.A** **3.B**

二、解答题

1. 记 $F(x,y,z)=e^{z}-z+xy-3$，则有 $\vec{n}=(1,2,0)$ 所以该点处切面方程为 $x+2y=4$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$

2. 设 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$ 则在点 (x_0,y_0,z_0) 处切平面的法向量

$\vec{n}=(2ax_0,2by_0,2cz_0)$

则切平面方程为：$2ax_0(x-x_0)+2by_0(y-y_0)+2cz_0(z-z_0)=0$

$ax_0x+by_0y+cz_0z=1$

法线方程为：$\dfrac{(x-x_0)}{ax_0}=\dfrac{(y-y_0)}{by_0}=\dfrac{(z-z_0)}{cz_0}$

3. 椭球面切平面的法向量为 $(2x,4y,2z)$ 平面 $x-y+2z=0$ 的法向量为（1，-1，2）

则 $\dfrac{2x}{1}=\dfrac{4y}{-1}=\dfrac{2z}{2}\Rightarrow z=2x,y=-\dfrac{1}{2}x$

代入椭球面方程得：$x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{11}},y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{22}},z=\pm2\sqrt{\dfrac{2}{11}}$

即切点坐标为 $\left(\sqrt{\dfrac{2}{11}},-\dfrac{1}{\sqrt{22}},2\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)$ 和 $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{11}},\dfrac{1}{\sqrt{22}},-2\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)$

则切平面方程为 $\left(x-\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)-\left(y+\dfrac{1}{\sqrt{22}}\right)+2\left(z-2\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)=0$

和$\left(x+\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y-\frac{1}{\sqrt{22}}\right)+2\left(z+2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0$ 即 $x-y+2z=\pm\frac{\sqrt{22}}{2}$

4. $z'_x=4-2x=0,z'_y=-4-2y=0\Rightarrow x=2,y=-2$ 得驻点（2，-2）

又 $z''_{xx}=-2,z''_{xy}=0,z''_{yy}=-2$ 则 $AC-B^2=4>0$ 且 A<0 则在（2，-2）有极大值，

$Z_{\max}=8$

5. 建立拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x+y-1)$ ，解得驻点$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，

解得极值为$\frac{1}{8}$.

6. 设矩形的边长分别为a,b 则$a+b=p$,绕边长为a的边旋转，则：

$V=\pi a^2\cdot b=\pi a^2\cdot(p-a)$

令$V'=0$ 解得 驻点$a=\frac{2}{3}p$,此时$b=\frac{p}{3}$

根据驻点的唯一性面积体积最大的圆柱体存在且唯一，所以$a=\frac{2}{3}p,\ b=\frac{p}{3}$时体积最大，

最大体积为$V=\pi a^2b=\frac{4\pi p^3}{27}$

7. 令$C'_x=40x-7y-100=0$ $C'_y=20y-7x-358=0$ 则驻点$(6,20)$

$C''_{xx}=40,C''_{xy}=-7,C''_{yy}=20$ 则$AC-B^2>0$又$A>0$ 则在$(6,20)$处有极小值，

又是唯一驻点，故也取最小值即甲产 6 吨，乙产 20 吨时总成本最低。

第五章测试题 A

一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1-5 A C B A A 6-10 A D B C B

二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. $\dfrac{x^2(1+y)}{1-y}$

2. 1

3. $\dfrac{1}{2}$

4. yx^{y-1}； $x^y\ln x$

5. $2e^{-y}\cos(2x+y)$ ； $e^{-y}[\cos(2x+y)-\sin(2x+y)]$

6. $\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

7. $\dfrac{2(xdx+ydy+zdz)}{x^2+y^2+z^2}$

8. $\dfrac{x}{1+e^z}$

9. $-6<a<6$

10. 5

三、综合题（每题 10 分，共 50 分）

1. 求偏导数

（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\sin y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}\sin y+e^{xy}\cos y$

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

3. (1) $dz = y^{\sin z}\cos x\ln y dx + y^{\sin x - 1}\sin x dy$

4. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}\left[y\sin(x+y)+\cos(x+y)\right]$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}\left[x\sin(x+y)+\cos(x+y)\right]$

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(\mathrm{e}^{xy},\sin y)\mathrm{e}^{xy}\cdot y$， $\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'(\mathrm{e}^{xy},\sin y)\mathrm{e}^{xy}\cdot x + f_2'(\mathrm{e}^{xy},\sin y)\cos y$.

四、应用题（10 分）

答案：当矩形边长分别为$\frac{a}{3}$和$\frac{a}{6}$时，绕短边旋转所得旋转体体积最大.

第五章测试题 B

一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1-5CBBBC 6-10 BADBA 10.（数一 B）

二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>2\}$

2. 1

3. y

4. $x(1+x)^{xy}\ln(1+x)$

5. $-\dfrac{y}{x^2}f'(\dfrac{y}{x})dx+\dfrac{1}{x}f'(\dfrac{y}{x})dy$

6. 0

7. -5

8. -5

9. $4dx-2dy$

10. $\dfrac{e^{2y}-2ye^{2x}}{e^{2x}-2xe^{2y}}$

三、综合题（每题 10 分，共 50 分）

1. (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y^2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=4xy-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln\left(x+y\right)+\dfrac{x}{x+y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x+y}.$

2. (1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4y}{(x-y)^3},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4x}{(x-y)^3},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3}$

3. (2) $dz=\dfrac{1}{x+\ln y}dx+\dfrac{1}{y(x+\ln y)}dy$.

4. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y\cos y(\cos y-\sin y),\frac{\partial z}{\partial y}=-2x^3\sin y\cos y(\sin y+\cos y)+x^3(\sin^3 y+\cos^3 y)$

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf(x^2-y^2,xy)+2x^3yf_1'+x^2y^2f_2'$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f(x^2-y^2,xy)-2x^2y^2f_1'+x^3yf_2'$

四、应用题（10 分）

答案 ：长、宽、高均为$\sqrt[3]{2}m$时，用料最省.

第五章强化训练

1. 求下列复合函数的一阶偏导数，其中f具有一阶连续的偏导数：

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+yf_2',\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'+xf_2'$　　(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1'}{y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f_2'}{z}-\frac{xf_1'}{y^2},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{yf_2'}{z^2}$

2. $2z$

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2 f_{11}''$ ，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2 f_{11}''+2xf_{12}''+f_{22}''$

4. $xe^{2y}f_{uu}''+e^y f_{uy}''+xe^y f_{xu}''+f_{xy}''+e^y f_u'$

5. $\frac{\partial u}{\partial x}=(1+y+yz)f'$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(x+xz)f'$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'$.

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2y}-2ye^{2x}}{e^{2x}-2xe^{2y}}$

7. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2ze^z-2y^3zx-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$

8. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z}{3z^2-2x},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{3z^2-2x}$

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}$

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-ye^{xy}}{xe^{xy}-2xy-\cos y}$

11. （数一）切平面方程为$9x+y-z-27=0$，法线方程为$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

12. （数一）切平面方程为$2x+6y-z-4=0$，法线方程为$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-4}{-1}$

13. （数一）$x+2y-4=0$

14. $f_{极小}(2,-2)=8$

15. 求下列函数的全导数

(1) $\frac{dz}{dt}=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$ ，(2) $\frac{dz}{dx}=f_x+\frac{1}{\cos^2 x}f_y$，其中 $y=\tan x$

16. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{e^x}{\cos z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\cos z}$

17. $\frac{xz}{z^2-xy}$

18. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'e^x\cos y+f_{11}''e^{2x}\sin y\cos y+2e^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}''+4xyf_{22}''$

19. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_1'}{F_2'}$

20.（数一）$z=2x+2y-2$

21. 96. 极大值 $f(-2,-1)=28$，极小值 $f(2,1)=-28$.

第六章 多元函数积分学（数一）

第一节 二重积分

一、选择题

1.C 2.D 3.B 4.C 5.C

二、计算题

1.（1）$\int_1^7 dy\int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_7^9 dy\int_{y-6}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

（2）$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dy\int_1^{2y} f(x,y)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2} dy\int_1^{3} f(x,y)dx+\int_2^6 dy\int_{\frac{y}{2}}^{3} f(x,y)dx$

（3）$\int_0^1 dy\int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)dx$ （4） $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

2.（1）先求交点为（1,1），（0,2）

$$\iint_D xdxdy=\int_1^2 dy\int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} xdx=\int_1^2 \frac{x^2}{2}\Bigg|_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} dy=\int_1^2 \left(3y-y^2-2\right)dy=\frac{1}{6}$$

（2）$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}dx=\int_0^1 ye^{\frac{x}{y}}\Bigg|_0^{y^2} dy=\int_0^1 \left(ye^{y}-y\right)dy$$

$$=\int_0^1 ye^y dy-\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=ye^y\Bigg|_0^1-\int_0^1 e^y dy-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

（3）

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\int_0^1 dy\int_{y-1}^{1-y} e^{x+y}dx+\int_{-1}^0 dy\int_{-1-y}^{1+y} e^{x+y}dx=\int_0^1 e^{x+y}\Bigg|_{y-1}^{1-y}dy+\int_{-1}^0 e^{x+y}\Bigg|_{-1-y}^{1+y}dy$$

$$=\int_0^1\left(e-e^{2y-1}\right)dy+\int_{-1}^0\left(e^{2y+1}-e^{-1}\right)dy=\left(ey-\frac{1}{2}e^{2y-1}\right)\Bigg|_0^1+\left(-e^{-1}y+\frac{1}{2}e^{2y+1}\right)\Bigg|_{-1}^0=e-e^{-1}$$

（4）积分区域在极坐标下可表示为 $D' = 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, 1 \le r \le 2$ 则

$$\iint\limits_{D} \arctan\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{D'} \theta r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 r\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \frac{r^2}{2}\Bigg|_1^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2}\theta d\theta = \frac{3}{2}\cdot\frac{\theta^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi^2}{64}$$

三、应用题

1.（1）$D' : 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le r \le 2\sqrt{2}$

则 $v = \iint\limits_{D}\left(8 - x^2 - y^2\right)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(8 - r^2\right) r dr = 32\pi$

（2）$v = \iint\limits_{D}(4 - y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \left(4 - r\sin\theta\right) r dr = 64\pi$

（3）$v = \iint\limits_{D}(2 - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(2 - r\right) r dr = \dfrac{4\pi}{3}$

（题目中 $Z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 改为 $Z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\,(x^2 + y^2 \le 1)$）

（4）$v = \iint\limits_{D}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy = \int_0^{\arctan k} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr = \dfrac{1}{3}R^3 \arctan k$

第二节 对坐标的曲线积分

一、填空题

1. -18π　　2. $\dfrac{3}{2}\pi$

二、计算题

1.解：方法一：参数方程$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$　$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$　则

$$\int 2xydx+\left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\cos\theta\sin^2\theta+\cos\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(1-2\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\sin^2\theta\right)d\sin\theta=\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2\sin^2\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

方法二：曲线积分与路径无关 可走折线，原式$=\int_0^1 y^2dy=\dfrac{1}{3}$

2.解：方法一：积分与路径无关，因为三条路径的起点终点一致所以三条路径的结果都一样，都可以按照折线的路径，

（1）原式$=\int_0^1 2xdx+\int_0^1(2-y)dy=\dfrac{5}{2}$

方法二：a.　$L:\begin{cases} x=y \\ y=y \end{cases}$　　$y:0\to1$

$$\int_L(2x+2y)dx+(2x-y)dy=\int_0^1(4y+y)dy=\frac{5}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{5}{2}$$

（2）　$L:\begin{cases} x=y \\ y=\sin\dfrac{\pi x}{2} \end{cases}$　$x:0\to1$

$$\int_L (2x+2y)dx+(2x-y)dy=\int_0^1\left[\left(2x+2\sin\frac{\pi x}{2}\right)+\left(2x-2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(2x+2\sin\frac{\pi x}{2}+\pi x\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{4}\sin\pi x\right)dx$$

$$=1+\left(-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{4}\cos\pi x\Bigg|_0^1+\pi\int_0^1\frac{2}{\pi}xd\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{5}{2}$$

（3） $\overline{OB}:\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases}\quad x:0\to 1$

$$\int_{OB}(2x+2y)dx+(2x-y)dx=\int_0^1 2xdx=x^2\Big|_0^1=1\qquad \overline{BC}:\begin{cases}x=1\\y=y\end{cases}\quad y:0\to 1$$

$$\int_{BC}(2x+2y)dx+(2x-y)dy=\int_0^1\left[(2+2y)\cdot 0+(2-y)\right]dy=\int_0^1(2-y)dy=2y-\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}$$

则 $\int_L (2x+2y)dx+(2x-y)dy=\frac{5}{2}$

3. 方法一：由格林公式得

$$\text{原式}=\iint\limits_D -1dxdy=-S_D=-8\pi$$

方法二：参数方程 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=4\sin\theta\end{cases}\quad \theta:0\to 2\pi$

$$\int(x+2y)dx+(x-y)dy=\int_0^{2\pi}\left[(2\cos\theta+8\sin\theta)(-2\sin\theta)+(2\cos\theta-4\sin\theta)(4\cos\theta)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-10\cos 2\theta-8(1-\cos 2\theta)+4(1+\cos 2\theta)\right]d\theta$$

$$=(5\cos 2\theta-4\theta+4\sin 2\theta+2\sin 2\theta)\Big|_0^{2\pi}=-8\pi$$

4. 参数方程 $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ $\qquad \theta : 0 \to 2\pi$

$$\int \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-(R\cos\theta + R\sin\theta)\cdot R\sin\theta - (R\cos\theta - R\sin\theta)\cdot R\cos\theta}{R^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -1 d\theta = -2\pi$$

5. 解： $L : \begin{cases} x = 2t^2 + t + 1 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ $\qquad t : 0 \to 1$

$$\int_L (x+y)dx + (x-y)dy = \int_0^1 \left[(3t^2+t+2)(4t+1) + (-t^2-t)(2t) \right] dt$$

$$= \int_0^1 (10t^3 + 5t^2 + 9t^1 + 2) dt = \left(\frac{5t^4}{2} + \frac{5t^3}{3} + \frac{9t^2}{2} + 2t \right) \Bigg|_0^1 = \frac{32}{3}$$

6.（1） $p = x + 2y, Q = x - y$ 则　　原式 $= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D (-1) dxdy = -8\pi$

（2） $p = 2xy - x^2, Q = x + y^2$ 则

原式

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D (1-2x) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x) dy = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \ \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^4 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{30}$$

（3） $P = x^2 - xy^3, Q = y^2 - 2xy$ ，则

原式

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D (-2y + 3xy^2) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy$$

$$= \int_0^2 (-4 + 8x) dx = (-4x + 4x^2) \Big|_0^2 = 8$$

7.（1）$\because \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 故与路径无关

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_1^2\left[x+2x-1+2(x-2x+1)\right]dx=\int_1^2(x+1)dx=\frac{5}{2}$$

（2）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2$ $\quad\dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2$ $\quad\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 故与路径无关

$$L:\begin{cases}x=x\\y=x+1\end{cases}\qquad x:1\to3$$

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(16xy^2-y^3\right)dx+\left(6x^2y-3xy^2\right)dx=\int_1^3\left[6x(x+1)^2-(x+1)^3+6x^2(x+1)-3x(x+1)^2\right]dx$$

$$=\int_1^3\left(8x^3+9x^2-1\right)dx=(2x^4+3x^3-x)\Big|_1^3=236$$

（3）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3$ $\quad\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-4y^3$ $\quad$故 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与路径无关

$$L:\begin{cases}y=y\\x=y+1\end{cases}\qquad y:0\to1$$

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+\left(x^2-4xy^3\right)dy=\int_0^1\left(-5y^4-4y^3+3y^2+4y+4\right)dy=(-y^5-y^4+y^3+2y^2+4y)\Big|_0^1=5$$

第六章测试题 A

一、选择题（每题 3 分共 24 分）

1.A **2.B** **3.C** **4.D** **5.A** **6.C** **7.A** **8.B**

二、填空题（每题 2 分共 20 分）

1. 0

2. $I=\int_0^1 dx\int_0^x f\left(x,y\right)dy$

3. $\dfrac{\pi R^4}{2}$

4. $\dfrac{\pi^4}{16}$

5. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$，$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

6. $\dfrac{1}{6}$

7. $A+8\pi$

8. $\dfrac{16}{15}$

9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\int_0^R f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

10. $\dfrac{1}{3}$

三、计算题（每题 10 分共 60 分）

1. e^{-1} 2. $\dfrac{64}{15}$ 3. $\dfrac{3}{8}\pi+1$

4. 4π 5. $\dfrac{(e-1)}{2}$ 6. $\dfrac{4}{5}$ 7. $\dfrac{32}{15}$

第六章测试题 B

一、选择题（每题 3 分共 24 分）

1.C　2.D　3.B　4.D　5.D　6.A　7.C　8.C

二、填空题（每题 2 分共 20 分）

1. $\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy$

2. 0

3. 1

4. 0

5. $\frac{3}{4}$

6. $\frac{3\pi}{8}$

7. -2π

8. 2π

9. $-\frac{56}{15}$

10. $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$

四、计算题（每题 10 分共 66 分）

1. $\frac{20}{3}$

2. $1-\sin 1$　　3. $\frac{45}{8}$

4. $I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2 ye^{xy}dx+\int_1^2 dy\int_1^2 ye^{xy}dx=\frac{1}{2}e^4-e^2$

5. $\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}$　　6. $\frac{3}{2}\pi$　　7. $\frac{\pi}{2}a^4$

第六章强化训练

综合题

1. e^{-1}

2. $\frac{20}{3}$

3. $\ln\frac{4}{3}$

4. $-\frac{3\pi}{2}$

5. $\frac{1}{2}(1-\cos 4)$

6. 1

7. $\frac{1}{36}$

8. $\frac{64}{15}$

9. $\frac{76}{3}$

10. 36

11. $\frac{13}{6}$

12. $\frac{3}{8}\pi+1$

13. $1-\sin 1$

14. -2

15. $\frac{1}{4}a^2b^2$

16. $\frac{9}{4}$

17. $\frac{45}{8}$

18. 9

19. $\frac{1}{8}$

20. $(e-1)^2$

21. 1

22. $\frac{33}{140}$

23. $\frac{e^2}{2}-e$

24. $I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2 ye^{xy}dx+\int_1^2 dy\int_1^2 ye^{xy}dx=\frac{1}{2}e^4-e^2$

25. $\frac{1}{2}(1-\cos 4)$

26. $\frac{a^3}{3}$

27. 4π

28. $\pi(1-\frac{1}{e})$

29. $\frac{\pi}{12}$

30. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$

31. πha^2

32. $\frac{32a^3}{9}$

33. $\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$

34. $\frac{(e-1)}{2}$

35. $\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}$

36. $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$

37. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)dy$

38. $\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

39. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

40. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

41. $\int_{-1}^0 dy\int_{-y}^1 f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

42. $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

43. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

44. $\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy$

45. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x}} f\left(x,y\right)dy+\int_2^{2\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f\left(x,y\right)dy$

46. $\int_0^1 dy\int_{-y}^{\sqrt{y}} f\left(x,y\right)dx$

47. $\frac{4}{5}$

48. $\frac{3}{2}\pi$

49. $(1)\frac{1}{3};(2)\frac{1}{12};(3)-\frac{1}{20};(4)\frac{17}{30}$

50. $\frac{32}{15}$

51. $\frac{\pi}{2}a^4$

52. 0

53. 4π

55. -2

56. 提示利用格林公式 **36**

第七章 级数

基础练习题

一. 选择题

1-5 AABDC　　6-10 CDDCC　　11-15 BBABA　　16-19 BCBD

二. 计算题

1.（1）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{3+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{3}$ 故 级数发散

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sin 3n$　又$\because \left|\sin 3n\right| \le 1$ 即 $-1 \le \sin 3n \le 1$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 3n$ 不存在

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin 3n$　是发散的

（3）$S_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3}} = 1-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n\cdot 2}\right) = \dfrac{3}{2}$　故 级数收敛

（4）$\dfrac{n+1}{3n^3+4} < \dfrac{n+1}{3n^3} < \dfrac{3n}{3n^3} = \dfrac{1}{n^2}$ 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由比较法知，原级数收敛

（5）等比级数，公比 $|q| = \dfrac{1}{4} < 1$，故原级数收敛

（6）$\dfrac{1}{\sqrt{9^n+3}} < \dfrac{1}{\sqrt{9^n}} = \dfrac{1}{3^n}$　，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛，故原级数收敛

（7）由比较法的极限形式知，原级数与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ 敛散性一致，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ 收敛，故原级数收敛.

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{e^n}=e>1$ 故 $\sum\limits_{n=r}^{\infty}\dfrac{e^n}{n^2}$ 发散

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{n!(n+1)}\cdot\dfrac{n!}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0<1$ 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n!}$ 收敛

（10）$\dfrac{\sin^2\alpha n}{2^n}\le\dfrac{1}{2^n}$ 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\alpha n}{2^n}$ 也收敛.

（11）因为由正项级数比值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}+2}\cdot\dfrac{3^n+2}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3}=\infty>1$ 故原级数是发散的。

2.（1）$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 则 $u_n\ge u_{n+1}$ 又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ 故该级数是收敛的

又该级数的绝对值级数为 $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 是发散的（p-级数的结论） $\therefore$ 原级数为条件收敛

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n,u_n=n,\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\neq0$ 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 是发散的。

（3）$\because\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n}=\dfrac{1}{3}<1$ 故为绝对收敛.

（4）$\left|\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{n^{\frac{4}{3}}}\right|\le\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 是收敛的，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{n^{\frac{4}{3}}}$ 是绝对收敛的.

3. $e^x=e^{x-1}\cdot e=e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(x-1)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e}{n!}(x-1)^n$； $x\in R$

4. $\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)=\ln a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{a^n\cdot n}$； $-a<x\le a$

5. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2+x-2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n, 0<x<4$

6. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(1-x\right)^2}=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；$\left|x\right|<1$

第七章测试题 A

一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1-5 CCDBB　　　　6-10 ACCBD

二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1.发散

2. $p>1,\quad p\le 1$

3.收敛

4.收敛

5. $a>1,\ 0<a\le 1$

6. $(-3,3]$

7. $(-\infty,+\infty)$

8. $R=\dfrac{1}{3}$

9. $\min\{R_1,R_2\}$

10. $\sqrt{3}$

三、综合题（共 60 分）

1.判别级数的敛散性（每题 5 分，共 20 分）

（1）发散　　（2）收敛　　（3）收敛　　（4）收敛

2.下列级数是绝对收敛还是条件收敛（每题 5 分，共 20 分）

（1）条件收敛　　（2）绝对收敛　　（3）绝对收敛　　（4）绝对收敛

3.求幂级数的收敛半径和收敛域（每题 5 分，共 10 分）

（1）$R=1,[-1,1)$　　（2）$R=1,[-1,1]$

4. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})x^n, x\in(-1,1)$

第七章测试题 B

二、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1-5 DDAAD　　6-10 BADAC

二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1.发散

2. $|q|<1$，$|q|\geq 1$

3. 收敛

4. 绝对收敛

5. $-1\leq a\leq 1$

6. $\frac{1}{2}$

7. 发散

8. $x=0$

9. $(-R,R)$

10. 2

三、综合题（共 60 分）

1.判别级数的敛散性（每题 5 分，共 10 分）

（1）收敛　　（2）发散　　（3）发散　　（4）收敛

2. 下列级数是绝对收敛还是条件收敛（每题 5 分，共 20 分）

（1）绝对收敛　　（2）条件收敛　　（3）绝对收敛　　（4）绝对收敛

3. 求幂级数的收敛半径和收敛域（每题 5 分，共 10 分）

（1）$R=1,\left[-1,1\right]$　　（2）$R=3,\left[-3,3\right]$

4. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})(x-1)^n, x\in\left(0,2\right)$；

第七章强化练习

一、利用级数的性质和判别方法判断级数的敛散性

1. 发散　　2. 发散　　3. 收敛　　4. 收敛　　5. 发散

6. 收敛　　7. 收敛　　8. 收敛　　9. 发散　　10. 发散

11. 收敛　　12. 收敛　　13. 收敛　　14. 发散　　15. 发散

16.收敛 17.收敛 18.发散 19.收敛

20. $a>1$,收敛;$0<a\le 1$,发散 21.收敛 22.发散 23.发散

24.收敛 25.发散 26.收敛 27.收敛 28.收敛

29.收敛 30.发散

二、判断各级数的敛散性。若收敛，是绝对收敛还是条件收敛

1.条件收敛 2.条件收敛 3.条件收敛 4.绝对收敛 5.绝对收敛

6.条件收敛 7.条件收敛

三、求幂级数的收敛半径和收敛域

1. $R=1,[-1,1)$

2. $R=1,[-1,1]$

3.略

4. $R=1,(3,5]$

5. $R=3,[-2,4)$

6. $R=\frac{1}{2},(0,1)$

7. $R=1,[1,3]$

8. $R=2,(-5,-1]$

四、将个函数展开成 x 的幂级数，并指出收敛域

1. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$;

2. $\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n,x\in(-1,1)$

3. $f(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n,x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$;

4. $f\left(x\right)=\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

五、将各函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并指出收敛域

1. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})(x-1)^n,x\in(0,2)$;

2. $f\left(x\right)=\ln 3+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{(x-1)^{n+1}}{\left(n+1\right)3^{n+1}},-2<x\le 4$.

第八章 常微分方程

基础练习题

一、选择题

1-3 DCD

二、计算题

1.(1)方程分离变量得 $\frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{1-x}$

取积分 $\int\frac{dy}{1+y}=-\int\frac{dx}{x-1}+\ln|C|$ 　　$\ln|1+y|=-\ln|x-1|+\ln|c|$ 　　得

$(1+y)(x-1)=C$

(2)将方程分离变量，并同时乘以 2，得 $\int\frac{2}{1+2y}dy=-\int\frac{2}{1+x^2}dx+\ln|C|$

$$(1+2y)(x^2+1)=C$$

(3)将方程分离变量，并同时乘以 2，得 $\frac{2y}{1+y^2}dy=\frac{2x}{x^2-1}dx$ 取积分

$$\int\frac{2y}{1+y^2}dy=\int\frac{2x}{x^2-1}dx+\ln|C| \quad \ln|y^2+1|=\ln|x^2-1|+\ln|c| \quad \frac{y^2+1}{x^2-1}=C$$

(4)化为标准形式 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y=-1$

则　通解 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=-\frac{1}{2}x+C\frac{1}{x}$

(5)通解 $y=e^{-\int dx}\left[\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right]=e^{-x}\left(\int e^{-x}e^{x}dx+C\right)=e^{-x}(x+C)$

(6)通解 $y=e^{-\int\frac{-n}{x}dx}\left[\int e^{x}x^{n}e^{\int-\frac{n}{x}dx}dx+C\right]=e^{n\ln|x|}\left(\int e^{x}x^{n}x^{-n}dx+C\right)=x^{n}(e^{x}+C)$

(7)化为标准形式 $y'+\frac{2x}{x^2+1}y=\frac{4x^3}{x^2+1}$

则通解为

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx}\left[\int\frac{4x^3}{x^2+1}e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}dx+C\right]=\frac{1}{x^2+1}\left(\int\frac{4x^3}{x^2+1}\left(x^2+1\right)dx+C\right)=\frac{1}{x^2+1}\left(x^4+C\right)$$

(8)化为标准形式 $y'-\frac{2}{x}y=x^2e^x$

则通解为 $y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int x^2e^xe^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x^2\left(\int x^2e^xx^{-2}dx+C\right)=x^2\left(e^x+C\right)$

特解带入后得　$y=x^2(e^x-e)$

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=x+y\Rightarrow\frac{dx}{dy}-x=y$ 则 通解 $x=e^{-\int-1dy}\left[\int ye^{\int-1dy}dy+C\right]$

$=e^y\left[\int ye^{-y}dy+C\right]=e^y\left(-ye^{-y}-e^{-y}+C\right)=-y-1+e^yC$ 即 $x=-y-1+e^yC$

(10)通解为

$$y=e^{-\int-\frac{2}{x+1}dx}\left(\int\left(x+1\right)^3e^{\int-\frac{2}{x+1}dx}dx+C\right)=\left(x+1\right)^2\left(\int\left(x+1\right)^3\left(x+1\right)^{-2}dx+C\right)$$

$$=\left(x+1\right)^2\left(\frac{\left(x+1\right)^2}{2}+C\right)=\frac{1}{2}\left(x+1\right)^4+C\left(x+1\right)^2$$

2.（1）特征方程为 $r^2+5r+6=0$ 解得 $r_1=-3$　$r_2=-2$ 故 通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$

（2）特征方程为 $r^2-4=0$ 解得 $r_1=2$　$r_2=-2$ 故 通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$

（3）特征方程为 $r^2+9=0$ 解得 $r_1=3i$　$r_2=-3i$ 故 通解为 $y=C_1\cos3x+C_2\sin3x$

（4）特征方程为 $r^2-2r+1=0$ 解得 $r_1=1$　$r_2=1$ 故 通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^x$

（5）特征方程为 $r^2+8r=0$ 解得 $r_1=0$　$r_2=-8$ 故 通解为 $y=C_1+C_2e^{-8x}$

（6）特征方程为 $r^2+2r+2=0$ 解得 $r_1=-1+i$　$r_2=-1-i$ 故 通解为

$y=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$

（7）对应齐次线性方程的特征方程为 $r^2+2r-3=0$ 解得特征根 $r_1=-3\quad r_2=1$

齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$

又 $\lambda=1$ 是单特征根，而 $m=0$，所以设特解形式为 $y^*=axe^x$

代入原方程为 $\left(ae^xx\right)''+2\left(axe^x\right)'-3\left(axe^x\right)=2e^x$ 解得 $a=\dfrac{1}{2}$

故与方程的通解为 $y=\left(C_1e^{-3x}+C_2e^x\right)+\dfrac{1}{2}e^xx$

（8）对应齐次线性方程的特征方程为：$r^2+3r=0$ 解得 $r_1=0\quad r_2=-3$

∴齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2$ 又 $\lambda=0$ 是单特征根，而 $m=1$，∴设特解为

$y^*=x\left(ax+b\right)$

代入原方程解得：$a=\dfrac{1}{2}\quad b=-\dfrac{1}{3}$ 故通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x$

（9）对应齐次线性方程的特征方程为 $r^2+2r=0$ 解得特征根 $r_1=0\quad r_2=-2$

∴齐次方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-2x}$ 又 $\lambda=-2$ 是单特征根 $m=0$ 故设特解为

$y^*=axe^{-2x}$

代入原方程解得：$a=-\dfrac{1}{2}$ 故通解为 $y=C_1+C_2e^{-2x}-\dfrac{1}{2}xe^{-2x}$

（10）特征跟 $r_{1,2}=\pm i$，而 $\lambda=0\quad w=1$，故设特解为 $y^*=x\left(A\cos x+B\sin x\right)$

代入原方程解得：$B=\dfrac{1}{2}\quad A=0$ 故 特解为 $y^*=\dfrac{1}{2}x\sin x$

又 对应齐次线性方程的特征根为：$r_{1,2}=\pm i$

故齐次线性方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$

故原方程通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x$

3.（1）　特征根 $r_1=2,r_2=-3$　　$m=1,k=1,\lambda=2$ 特解形式 $y^*=(ax^2+bx)e^{2x}$

（2）$\mathrm{r}=\pm1$，$\lambda=1$，$k=1,y^*=axe^x$

（3）$r=\pm i,m=1,k=0,\lambda=-1$　　$y^*=(ax+b)e^{-x}$

（4）对应的齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=\pm2i$ 故齐次通解为 $Y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$

又 $\lambda=0$ 不是特征跟，且 m=2，故设特解为 $y^*=\left(ax^2+bx+c\right)$

（5）特征根为 $r_1=0,r_2=-3$，而 $\lambda=0,\omega=1$，所以，$\lambda\pm\omega i=\pm i$ 不是特征跟。

设方程特解形式为　$y^*=a\cos x+b\sin x$，

第八章自测题 A

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1.D　　2.D　　3.D　　4.A　　5.B

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

1. $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$　　2. 2

3. $y=\frac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-3x}$　　4. $y=(x-2)^3-(x-2)$

5. $x=-2y+3\sqrt{y}$　　6. $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}$

7. $y=e^{-x}(x+C)$

8. $x=-ye^{y}+Cy$

三、求微分方程的解（共 50 分）

1. $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+C$

2. $y=(x+1)^2(x+C)$

3. $y=\frac{4x^3}{3(x^2+1)}+\frac{C}{x^2+1}$　　4. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$

5. $y=2x-1+Ce^{-2x}$

6. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\frac{2}{3}xe^{x}$

7. $2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)=0$

四、综合题（11 分）

两边求导得：$f'(x)-2f(x)=-1$

解得通解为

$f(x)=e^{2x}(\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2})$

第八章自测题 B

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1.B 2.A 3.B 4.C 5.D 6.C

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

1. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-x+\dfrac{1}{3}$

2. $y''-y=0$

3. $y''-4y'+4y=0$

4. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}e^x+x$

5. $y=e^{Cx}$

6. $y=C_1+C_2e^{2x}$

7. $e^y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}$

8. $3x^4+4(y+1)^3=C$

三、求微分方程的解（共 50 分）

1. $y=C\sin x-1$

2. $\ln^2 x+\ln^2 y=C$

3. $y=e^{-3x}(\dfrac{2}{3}e^{3x}+C)$

4. $\dfrac{3}{2}x^2+\ln\left|1+\dfrac{3}{y}\right|=C$ 或 $(1+\dfrac{3}{y})e^{\frac{3}{2}x^2}=C$

5. $y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$

四、综合题（8 分）

$y''-y'=0$ 通解 $y=C_1+C_2e^x$

第八章强化练习

一. 求各微分方程的通解或特解.

1. $y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+C$

2. $y=(1+x)^2(x+C)$

3. $y=C\sin x-1$

4. $10^x+10^{-y}=C$

5. $\ln^2 x+\ln^2 y=C$

6. $e^{-y}=1-Cx$

7. $(y^2-1)(x^2-1)=C$

8. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}=\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}$

9. $y=x\sec x$

10. $e^y=\frac{1}{2}(1+e^{2x})$

11. $y=xe^{-\sin x}$

12. $x=\frac{y^2}{2}+Cy^3$

13. $y=\frac{2}{3}+Ce^{-3x}$

14. $y=(x+C)e^{-x}$

15. $\frac{3}{2}x^2+\ln\left|1+\frac{3}{y}\right|=C$ 或 $(1+\frac{3}{y})e^{\frac{3}{2}x^2}=C$

16. $y=(\frac{4}{3}x^3+C)(\frac{1}{x^2+1})$

17. $y=2x-1+Ce^{-2x}$

18. $y = Ce^{-x^2} + 2$

19. $y = x^3 + Cx$

20. $y = -x\sec x$

21. $y = \dfrac{1}{x}\left(e^x + \pi - e^\pi\right)$

22. $y = \dfrac{\pi - 1 - \cos x}{x}$

23. $y = \dfrac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x} + 1)$

24. $\dfrac{3}{2}x^2 + \ln\left|1 + \dfrac{3}{y}\right| = C$ 或 $(1 + \dfrac{3}{y})e^{\frac{3}{2}x^2} = C$

25. $y = C_1 + C_2e^x - \dfrac{1}{2}x^2 - x$

26. $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$

27. $y = C_1e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$

28. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$

29. $y = (C_1 + C_2x)e^{\frac{5}{2}x}$

30. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}$

31. $y = e^{-2x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$

32. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}} + e^x$

33. 略 34. $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x} + \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{11}{25}x^2 - \dfrac{19}{125}x$

35. 略.　　36. $\boldsymbol{y = Cx - x^3}$

37. $y = \dfrac{\sin x + C}{x^2 - 1}$

38. $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 e^{-x}}$

39. 略　　40. $\boldsymbol{y = e^{-2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)}$

41. $\boldsymbol{y = e^{-x^2}(\dfrac{x^2}{2} + 1)}$

42. $e^y = \dfrac{1}{2}(e^{2x} + 1)$

二、按要求做下列各题

1. $y = C_1 + C_2 e^x$

2. $y = C_1 e^x + C_2 x^2 + 3$

3. $f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{2x} + 1)$

5. $y = -\dfrac{1}{2}e^{3x} + \dfrac{5}{2}e^x$

6. 略　7. 略

8. $f(x) = -2e^{\frac{1}{2}x^2} + 2$

第九章　线性代数

第一节　行列式

一、选择题

1.D　　　　2.B　　　　3.B　　　　4.D　　　　5.C

二、计算题

（1）

$$\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-5&1\\-3&1&0&-6\\2&0&-1&2\\4&1&-7&6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-5&1\\0&7&-15&-3\\0&-4&9&0\\0&-7&13&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-5&1\\0&7&-15&-3\\0&0&\frac{3}{7}&-\frac{12}{7}\\0&0&-2&-1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&2&-15&1\\0&7&-15&-3\\0&0&\frac{3}{7}&-\frac{12}{7}\\0&0&0&-9\end{vmatrix}=27$$

（2）$\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&0&6&2\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}=0$　（两行相等）

（3）

$$\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+3b&b&b&b\\a+3b&a&b&b\\a+3b&b&a&b\\a+3b&b&b&a\end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix}1&b&b&b\\1&a&b&b\\1&b&a&b\\1&b&b&a\end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix}1&b&b&b\\0&a-b&0&0\\0&0&a-b&0\\0&0&0&a-b\end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3$$

（4）

$$\begin{vmatrix}-ac&ac&ac\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&-c&e\\b&c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\0&0&2e\\0&2c&0\end{vmatrix}=-adf\begin{vmatrix}-b&c&a\\0&2c&0\\0&0&2e\end{vmatrix}=4abcdef$$

（5）$a^2+b^2+c^2+1$

（6）1

2.18

3. $\because D=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&0\\0&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&0\\0&0&1\end{vmatrix}=3\neq 0$　故有唯一解

又 $D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&0\\0&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=6$　　$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=0$

$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&0\\0&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&3&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=-3$　故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=2$　$x_2=0$

$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1$

4. 由题意知 $\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=0$，计算得 $a=1,-2$

第二节 矩阵

一、选择题

1-5 BCBDB　　　6-10 CDACC　　　11.B

二、填空题

1. -18　　2. -12

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdots$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

4. $5^4|A|$

5. $\dfrac{1}{2}$

6. 128

7. $\begin{bmatrix} 2^{100} & & \\ & (-1)^{100} & \\ & & 3^{100} \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

三、计算题

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $BA^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

（1）$3AB-2B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -7\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix}0 & 2 & -5\\ -2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$　　（3）$\begin{pmatrix}6 & 4 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

2.（1）$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix}6 & -7 & 8\\ -12 & -5 & 10\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdots=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdots=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdots=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

（4）

$$\left(x_1\ x_2\ x_3\right)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\left(x_1a_{11}+x_2a_{12}+x_3a_{13},\ x_1a_{12}+x_2a_{22}+x_3a_{23},\ x_1a_{13}+x_2a_{23}+x_3a_{33}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}{x_1}^2+a_{22}{x_2}^2+a_{33}{x_3}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 8 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 故秩为 2

4.　1

5.（1）$|A|=1,(A)^*=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$　　$\therefore A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$

（2）

$$(A\vdots I)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&-2&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-2&0\\0&1&0&0&1&1\\0&0&-2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

（3）

$$(A\vdots I)=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\3&0&-2&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&-1&0\\0&3&-2&3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2&2&1\\0&1&0&3&2&1\\0&0&1&3&3&1\end{pmatrix}\quad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&1\\3&3&1\end{pmatrix}$$

6. 解：

$$A-2I=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},\ |A-2I|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}\neq 0$$

$A-2I$ 可逆

$$(A-2I\quad I)=\begin{pmatrix}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{pmatrix}=(I\quad (A-2I)^{-1}).$$

7. $AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$

$$(AI)=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}=(IA^{-1})$$

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&1&0\end{pmatrix}$$

8. 解 $|A|=\begin{vmatrix}0&1&2\\2&0&-5\\3&-1&-8\end{vmatrix}\neq 0,|A-I|=\begin{vmatrix}-1&1&2\\2&-1&-5\\3&-1&-9\end{vmatrix}\neq 0$

$ABA=2A+BA\Rightarrow (A-I)BA=2A\Rightarrow B=2(A-I)^{-1}$ 利用初等变换，求 $(A-I)^{-1}$ 即可

$(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}4&7&-3\\3&3&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}8&14&-6\\6&6&-2\\2&4&-2\end{pmatrix}$

第三节 向量组 线性方程组

一、选择题

1.A（看是否成比例）　2.B　3.B　4. D　5.C

二、填空题

1.2

2. $\lambda=-1$或$\lambda=4$

3. $(1,-1,0,0,0)^T$与（$-1,0,-1,0,1)^T$

4. $t=1$

5. $k=\dfrac{15}{4}$

6.4

7. $k\left(1,1,1\right)^T+\left(2,0,3\right)^T$

三、解答题

1.（1）（11,8，-2，-13）

（2）$2(\alpha_1+\beta)-3\left(\alpha_2-\beta\right)=4\left(\alpha_3+\beta\right)$　$2\alpha_1-3\alpha_2+5\beta=4\alpha_3+4\beta$

$\beta=4\alpha_3-2\alpha_1+3\alpha_2$　$\therefore\beta=\left(7,3,2,-16\right)$

2.（1）方法一：构造行列式$\left|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\right|$，得行列式的值为 0，故线性相关

方法二：设实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$

即$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\\lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3=0\end{cases}$　可得非零解$\left(1,1,-1\right)^T$，故是线性相关的

（2）方法一：构造矩阵$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\right)$，得秩为 2，故相关

方法二：设实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$

即 $\begin{cases} \lambda_1+3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+3\lambda_2=0 \\ 2\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3=0 \\ 4\lambda_1+2\lambda_2+14\lambda_3=0 \end{cases}$ 可得非零解 $(-3,1,-1)^T$，故是线性相关的

（3）方法一：构造矩阵 $\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\right)$，得秩为 2，故相关

方法二：设实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$

即 $\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3=0 \\ \lambda_1+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1+4\lambda_2+6\lambda_3=0 \end{cases}$ 可得非零解 $(-2,-1,1)^T$，故是线性相关的

（或判断对应矩阵的行列式值是否为零）

3. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=0$ 有非零解则

$\begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix}=0$ 即 $t\left(t^2-1\right)+\left(-1-t\right)-\left(1+t\right)=0 \Rightarrow t^3-3t-2=0 \Rightarrow t=-1$ 或 2

4. $A=\left(\beta_1{}^T,\beta_2{}^T,\beta_3{}^T,\beta_4{}^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore A$ 的秩为 3，β_1,β_2,β_3 为一个极大无关组（不唯一）

5. 解：将系数矩阵 A 化为最简形

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

与原方程组同解的最简方程组为 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ -3x_2-6x_3-4x_4=0 \\ x_4=0 \end{cases}$

取 x_3 为自由未知数得一般解为 $\begin{cases} x_1 = 2x_3 = 2k \\ x_2 = -2x_3 = -2k \\ x_3 = k \\ x_4 = 0 \end{cases}$

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ -2k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad k \in R \quad$ 基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. 解：方程增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故同解方程组：$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \end{cases}$ 通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$k_1 \in R, k_2 \in R$

第九章测试题 A

一、选择题

1-5 DCBBD　　6-8 CAD

二、填空题

1. $(a+3b)(a-b)^3$　　2. 135

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$　　4. $r(A)=2$

5. 2　　6. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

7. $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$

三、综合题

1. 6　　2. （1）$AB=\begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}$　$BA=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 10 & -3 \end{bmatrix}$

4. （1）A,B 均可逆；　（2）$2X=\begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 7 & 11 & 5 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

5. $r(A)=2$

6. 3

7. (1) $\beta=2\alpha_1+\alpha_2$;

（2）不能表示

8. $X=(11,-4,1,0)^T+c(-3,0,1,1)^T$　（c 为任意常数）

第九章测试题 B

一、选择题

1.D　2.D　3.C　4.C　5.B　6.C　7.D

二、填空题

1.0　2. -2　3. $3^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{4}&0&0\end{bmatrix}$

5. 4　6. ±1

三、综合题

1. 160　2.（1）$\begin{bmatrix}12&6\\-2&-4\\-11&14\end{bmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}13\\3\\2\end{pmatrix}$

3. $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&0&0\\-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&-3&2\end{bmatrix}$

4.（1）A 可逆；$A-I$ 可逆　（2）$B=\begin{bmatrix}8&14&-6\\6&6&-2\\2&4&-2\end{bmatrix}$

5. -3 6. 3 7. β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

8. $X=(-2,5,0,0)^T+c_1(-1,2,1,0)^T+c_2(5,-7,0,1)^T$.（$c_1,c_2$ 为任意常数）

第九章强化训练

1. (1) $X=(11,-4,1,0)^T+c(-3,0,1,1)^T$ （c 为任意常数）

(2) 无解

(3) $X=(-2,5,0,0)^T+c_1(-1,2,1,0)^T+c_2(5,-7,0,1)^T$.（$c_1,c_2$ 为任意常数）

(4) $X=(0,1,0,0)^T+c_1(1,-2,0,0)^T+c_2(0,1,1,0)^T$.（$c_1,c_2$ 为任意常数）

(5) $X=(1,-1,0,0)^T+c_1(2,0,1,0)^T+c_2(-3,-1,0,1)^T$ （c_1,c_2 为任意常数）

2. (1) $\lambda\neq1,-2$ 时有唯一解； （2） $\lambda=-2$ 无解

(3) $\lambda=1$ 有无穷多解，通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

3. $a=-2$.

4. $b=\dfrac{(a+1)^2}{4}$

5.（1）$A_{12}=6$ （2）$A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-A_{14}=0$ （3）$A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}=144$

6. $B=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$（提示：使用 A^{-1} 逆可得整数. 右乘 A^{-1}： $A^{-1}B=6I+B$ ）

7. $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-3I)$（提示：方程化为 $A(\dfrac{1}{2}(A-3I))=I$.）

8. $(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$； $X=A+I=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

9. (1) 当 $D\neq0$ 即 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程组只有零解，

(2)当 $D=0$ 即 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时,方程组有非零解,

当 $\lambda=-2$ 时，通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 为任意实数.

当 $\lambda=1$ 时,通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1-k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1$，$k_2$ 为任意实数.

10. 方程组有无穷多解,通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$(其中$k$任意).

11. 当 $\lambda=1$或$\lambda=-2$ 时，方程组有解. 当 $\lambda=1$ 时,通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数；

$\lambda=-2$ 时，通解为 $x=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

12.（1）$\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq0$ 时,有 $r(A)=r(B)=3$,方程组有唯一解；

（2）$\lambda=1$ 时,方程组有无穷解；（3）$\lambda=0$ 时,方程组无解.

13. $\lambda=1$ 时,方程组有无穷多解,通解为 $x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$\lambda=2$ 时,方程组无解. 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq2$ 时,方程组有唯一解.

14. 当 $a=-3$ 时,方程组无解;当 $a\neq-3$ 且 $a\neq2$ 时,方程组有唯一解；

当 $a=2$ 时,方程组有无穷多解,一般解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$.

15. (1)当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时,方程有唯一解;当 $\lambda=-2$ 时,方程无解;当 $\lambda=1$ 时,方程有无穷

多解.

(2)通解为$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$

16. (1)当$a\neq5$时方程解唯一,当$a=5\ \ b\neq-1$时,方程无解,当$a=5\ \ b=-1$时方程有无穷多解.

(2)通解为$k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

17. 当$\boldsymbol{a=0,b\neq4}$时,方程组无解;当$\boldsymbol{a\neq0}$时,方程组有唯一解;

当$\boldsymbol{a=0,b=4}$时,方程组有无穷多解,一般解为.$\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$