河北省 2008 年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）试题参考答案

一、单项选择题

1. A

2. B 评注：本题考查的是两个重要极限.(关键看趋向，灵活运用)

3. C 评注：本题考查的是导数的定义

法 1：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=2f'(x)$

法 2：括号内相减，分子分母要一致，消去谁，谁的导

4. B 评注：$f'(x)<0$，函数在$[-1,1]$上严格单调递减，有根据介值定理得答案 B.

5. D 评注：本题考查的是基本积分公式

6. A

7. D

8. A 评注：本题考查的是二阶常系数微分方程的通解.

9. D 评注：本题考查的是向量组的线性相关性，秩为 2，故向量组α,β,γ线性相关.

10. C 评注：此题考查的是行列式和矩阵的性质.

二、填空题

11. 2　$(1,-1,-2)$　评注：本题考查的是向量的数量积与向量积.

12. $\dfrac{29}{4}$　评注：利用$f'(\zeta)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$计算得出.

13. 0　评注：本题考查的是格林公式，$P=xy^2,Q=x^2y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}=0$.

14. $\dfrac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1)$　评注：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\dfrac{x}{1-x})'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

三、计算题

15. 解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\dfrac{e^{x^2}-x^2-1}{x^2(e^{x^2}-1)}=\dfrac{1}{2}$　$\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+a)=a=f(0)=\dfrac{1}{2}$.

评注：本题考查的是函数的连续性.

16. 解：$f(x)=(\cos x+x\sin x)'=x\cos x$

$\int[x+f(x)]f(x)'dx=\int xdf(x)+\int f(x)df(x)=xf(x)+\int f(x)dx+\frac{1}{2}f^2(x)$

$=x^2\cos x+\frac{1}{2}x^2\cos^2 x-\cos x-x\sin x+c$.

评注：本题考查的是原函数与分部积分法求不定积分.

17. 解：$\because \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2-6z)=0\Rightarrow 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-6\frac{\partial z}{\partial x}=0\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{3-z}$

又$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2-6z)=0\Rightarrow 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-6\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{3-z}$

$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(3-z)\cdot 0-x(-\frac{\partial z}{\partial y})}{(3-z)^2}=\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{(3-z)^2}=\frac{xy}{(3-z)^3}$

评注：本题考查的是二元函数的混合偏导数.

18. 解：$\iint_D|y-x^2|dxdy=\int_0^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy+\int_0^1dx\int_1^{x^2}(x^2-y)dy=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}$

19. 解：法 1：令$x-1=t$，原式化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1=\rho,\therefore R=1$.

当$t=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散;当$t=-1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，所以收敛域为：$t\in[-1,1)$, 即$x\in[0,2)$.

法:2：该题较为简单，可通过观察得到收敛半径为 1，对称点为$x=1$，通过分析端点值可得收敛域.

20. 解：$\int_1^x tf(t)dt=(x-1)f(x)$两边求导得$f'(x)=f(x)$，即$\frac{dy}{dx}=y$

解得$y=f(x)=Ce^x$，又$\because f(0)=1\ \ \therefore f(x)=e^x$.

评注：本题考查的是积分上限函数的求导及变量分离微分方程的求解.

21. 解：(1) $B=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&\lambda-3\\1&\lambda&1&-2\\1&1&\lambda&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&3\lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda-\lambda^2&3\lambda-3\end{pmatrix}$

当$\lambda\neq1,-2$时，有唯一解；当$\lambda=-2$时，无解；当$\lambda=1$时，有无穷解.

(2)当$\lambda=1$时，有无穷解.

$B\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$,通解为：$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$.

22. 证明: $S=\int_0^1(3ax^2+2bx)dx=a+b=4$

$$V=\int_0^1 \pi(3ax^2+2bx)^2dx=\pi(\frac{9}{5}a^2+3ab+\frac{4}{3}b^2)$$

$\because a+b=4\Rightarrow b=4-a$，$V=\pi(\frac{2}{15}a^2+\frac{4}{3}a+\frac{64}{3})$　$V'=\pi(\frac{4}{15}a+\frac{4}{3})$

令$V'=0$，得唯一驻点$a=-5$又$\because V''>0$，$\therefore a=-5$为极小值点，也为最小值点

故当V取最小值是，$a=-5$，$b=9$.

河北省2008年专科接本科教育考试数学（二）（财经类）试题参考答案

一、单项选择题

1. B 评注：$x+1\in[0,1]\Rightarrow x\in[-1,0]$

2. D 评注：本题考查的是左右导数与导数的关系.

3. A 评注：本题考查的是隐函数的求导.

4. D 评注：本题由拉格朗日公式可计算出$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

5. A 评注：边际收入是总收入的导数.

6. C 评注：$\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=f(\ln x)+C=\dfrac{1}{x}+C$.

7. B 评注：本题考查的是定积分的计算.

8. A 评注：本题考查的是二元函数的偏导数.

9. D 评注：本题考查的是关于$p-$级数的敛散性.

10. C 评注：本题考查的是矩阵的性质.

二、填空题

11. e^3 评注：本题考查的是函数的连续性.

12. $x-y=1$ 评注：本题考查的是函数的导数.

13. 2，$[-3,1)$

14. 1

三、计算题

15. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t)dt}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$

评注：本题考查的是罗必塔法则及积分上限函数的导数.

16. 解：$\int 2x(\cos x-e^{x^2})dx=\int 2x\cos xdx-\int 2xe^{x}dx$

$$=2\int xd\sin x-\int e^{x^2}dx^2=2x\sin x+2\cos x-e^{x^2}+C.$$

评注：本题考查的是分部积分法求不定积分.

17. 解：$\because f(x-\frac{1}{x})-1=x^2+\frac{1}{x^2}-1\quad \therefore f(x-\frac{1}{x})-1=(x-\frac{1}{x})^2$，即 $f(t)=t^2+1$.

故 $\int_{-1}^{1}\left[x^3\cos 2x+f(x)\right]dx=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1(x^2+1)dx=\frac{8}{3}$.

评注：本题考查的是利用函数的奇偶性计算定积分.

18. 解：由 $\begin{cases}x=y^2\\ x=1\end{cases}$ 可得焦点 $(1,-1)$ 和 $(1,1)$ $\quad\therefore A=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}dy=\frac{4}{3}$

$$\frac{1}{2}A=\frac{2}{3}=\int_0^a dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^a 2\sqrt{x}dx\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

19. 解：$dz=f_u du+f_v dv=(yf_u-\frac{y}{x^2}f_v)dx+(xf_u+\frac{1}{x}f_v)dy$.

20. 解：$p(x)=-1,q(x)=2xe^{x}\qquad \int p(x)dx=\int -1dx=-x+C$

$$\therefore y=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)=e^{x}(x^2+C)$$

评注：本题考查的是一阶线性微分方程的通解.

四、解答题

21. 解：(1)

$$B=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&2-a-a^2&-2-a\end{pmatrix}$$

$a\neq 1,-2$ 时有唯一解，$a=1$ 无解，时有无穷解

（2）当 $a=-2$ 时 $\quad B\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

同解方程组 $\begin{cases}x_1=x_3+1\\ x_2=x_3\end{cases}$ 对应齐次方程组的基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 特解：$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 所以：$x=k\xi+\eta$

（K 为任意常数）

22. 解：$L(x)=11x-(25+x+\frac{x^2}{4})=-\frac{x^2}{4}+10x-25(x>0)$

$L'(x)=-\frac{x}{2}+10=0\Rightarrow x=20,L''=-\frac{1}{2}<0$ $(x=20)$是驻点

$\therefore x=20$为极大值点，且唯一，所以是最大值，此时$L=75$万元.

河北省2008年专科接本科教育考试数学（三）（管理类）试题参考答案

一、单项选择题

1. D 评注：本题考查的是基本初等函数的定义域.

2. B

3. A 评注：本题考查的是在$x\to 0$时，那个函数的极限为0，B、C、D选项极限不存在.(考查了两个重要极限，关键分析趋向)

4. C 评注：本题考查的是两个函数乘积的导数问题.（$(uv)'=u'v+uv'$）

5. D 评注：本题考查的是罗尔定理的三个条件：闭区间上连续，开区间内可导，区间端点处的函数值相等.

6. C 评注：本题考查的是驻点与极值点及可导与连续的关系.

关于极值点，我们有如下结论：极值点可能在驻点或者不可导点处取得；如果函数可导，则极值点一定为驻点；驻点、不可导点都不一定是极值点，我们需要根据驻点（或者是不可导点）左右两侧导数的符号来进一步判断驻点（不可导点）是否是极值点.

7. B 评注：本题考查的是积分上限函数的求导.（变上限积分的求法 上限代人乘上限导数）

8. B 评注：本题考查的是比值及比较判别法.

9. A 评注：本题考查的是变量可分离的微分方程的通解.

10. C 评注：本题考查的是行列式的性质$\left|-3A^T\right|=(-3)^3|A|$.

二、填空题

11. -1 评注：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x-3)}=-1$.本题考查的是等价无穷小替换求极限.

12. $e^{xy}(1+xy)$ 评注：本题考查的是二元函数偏导.

13. 2 评注：法1：幂级数的收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

14. $\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&0\end{pmatrix}$评注：本题考查的是逆矩阵的求法.法1：$(AE)=(EA^{-1})$法2：伴随矩阵$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

三、计算题

15. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{2}{2x-5})^{\frac{2x-5}{2}}\right]^{\frac{2(3x+1)}{2x-5}}=e^3$.

评注：本题考查的第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

法 2：原式=$e^{\frac{-3-(-5)}{2}\cdot 3}$

16. 解：当切线方程为$\dfrac{d}{dx}(e^{xy}+y+\cos x-1)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin x-ye^{xy}}{xe^{xy}+1}$

当 $x=0,y=-1$ $\quad\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=1$ 所以 切线方程为 $x-y=1$

评注：本题考查的是隐函数的求导问题.

17. 解：$f(x)=(xe^x)'=e^x(1+x)$，$f'(x)=e^x(2+x)$

$\int xf''(x)dx=\int xdf'(x)=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C=e^x(x^2+x-1)+C$

评注：本题考查的是原函数与分部积分法.

18. 解：$\int_1^4\dfrac{dx}{x+\sqrt{x}}$ 令 $\sqrt{x}=t$ $\quad\int_1^2\dfrac{2dt}{t+1}=2\ln(t+1)\Big|_1^2=2\ln\dfrac{3}{2}$

评注：本题考查的是换元积分法.

19. 解：两曲线交点为(1,1) $A=\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\dfrac{1}{3}$

评注：本题考查的是元素法求平面图形的面积.

法 2：大面积减小面积.

20. 解：$p(x)=-1,q(x)=2xe^x$, $\int p(x)dx=-x+C$ $\quad\therefore y=e^x\left(x^2+C\right)$

评注：本题考查的是一阶线性微分方程的通解.

21. 解：(1) $B=\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\1&-2&4&2\\2&-1&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\0&-1&1&1\\0&1&a-6&b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\0&1&-1&-1\\0&0&a-5&b-1\end{pmatrix}$

$a\neq5$，有唯一解；$a=5,b\neq1$，无解；$a=5,b=1$, 有无穷多解；

(2) $B\to\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-2x_3\\x_2=x_3-1\end{cases}\Rightarrow\xi=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\therefore X=k\xi+\eta$

（K 为任意常数）

五、证明题

22. 证明：$V=\pi(\frac{d}{2})^2h=\frac{\pi d^2h}{4}\Rightarrow h=\frac{4V}{\pi d^2}$

$y=2\pi\ (\frac{d}{2})^2+2\pi(\frac{d}{2})h=\frac{\pi d^2}{2}+\frac{4V}{d}$ $y'=\pi d-\frac{4V}{d^2}=0\Rightarrow$ 驻点 $d=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

$y''=\pi+\frac{8V}{d^3}>0$ $\therefore d=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ 为极小值点，故为最小值点.

此时 d ：$h=d:\frac{4V}{\pi d^2}=d^3:\frac{4v}{\pi}=1:1$

河北省 2009 年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）参考答案

一、单项选择题

1. B

2. A 评注：本题考查的是当 $x\to 0$ 时，$e^{x^3}-1$ 与那个函数的比值的极限为 1

3. B 评注：本题考查的是向量的数量积.

4. C 评注：本题考查的是函数的连续性及两个重要极限.

5. D 评注：本题考查的是原函数及分部积分法 $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx$

6. A 评注：本题考查的是二阶常系数微分方程的通解，

特征方程：$r^2-2r-3=0, r=3$ 或 -1，通解为 $C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

7. B

8. A 评注：本题考查的是二元函数的连续性、偏导数及可微的关系.

9. D 评注：本题考查的是方阵及行列式的性质

$|B|=|a_1,a_2+2a_3,3a_3|=|a_1,a_2,3a_3|+|a_1,2a_3,3a_3|=3|a_1,a_2,a_3|=6$

10. D

二、填空题

11. $-\frac{e^{3t}}{3(1+t^2)}$ 评注：本题考查的是参数方程的导数.

12. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}$ 评注：本题考查的是函数的偏导数及空间直线方程.

13. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$

14. $x-\frac{1}{4}$

三、计算题

15. 解：令$u=x+y,v=xy$，$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u+yf_v$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{uu}+xf_{uv}+f_v+yf_{vu}+xyf_{vv}$

16. 解：$p(x)=2x,q(x)=2xe^{-x^2}$

$\int p(x)dx=\int 2xdx=x^2+C\therefore y=e^{-x^2}(x^2+C)$ 评注：本题考查的是一阶 线性微分方程的通解.

17. 解：$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx+\int_1^2(x+1)dx=\int_0^1\frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx+(\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_1^2$

$=\arctan e^x\Big|_0^1+\frac{5}{2}=\arctan e+\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}$ 评注：本题考查的是分段函数的定积分.

18. 解：令$x-2=t$，原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n n},\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}=\frac{3^n n}{3^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{3}$

$\therefore R=3,$当$t=3,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n n}$发散；当$t=-3,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛. $\therefore$ 收敛域$t\in[-3,3)$, 即$x\in[-1,5)$

19. 解：设$II_1:x+y+2z-2=0$的法向量$\vec{n_1}=(1,1,2)$ $II_2:x+2y+z+1=0$的法向量$\vec{n_2}=(1,2,1)$，设直线的方向向量为$\vec{s}$，则$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(-3,1,1)$

所求平面方程$-3(x-1)+(y-2)+(z-1)=0$ 即$3x-y-z=0$.

评注：本题考查的是空间平面方程.

20. 解：$OA:\begin{cases}x=x\\y=x\end{cases}x:0\to 1AB:\begin{cases}x=x\\y=1\end{cases}x:1\to 0BO:\begin{cases}x=0\\y=y\end{cases}y:1\to 0$

原式$=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

评注：本题考查的是第二类曲线积分.

四、解答题

21. 解：设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\2&-1&-1&2\\3&6&-9&7\\4&-5&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&3&-3&4\\0&-9&9&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=3$ 　　极大无关组 a_1,a_2,a_3

设 $a_3=k_1a_1+k_2a_2+k_4a_4$，则有 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=-2\\2k_1-k_2+2k_3=-1\\3k_1+6k_2+7k_3=-9\\4k_1-5k_2+2k_3=1\end{cases}$

$B=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\2&-1&2&-1\\3&6&7&-9\\4&-5&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&-3&0&3\\0&3&4&-3\\0&-9&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore k_1=-1,k_2=-1,k_4=0\ \therefore a_3=-a_1-a_2$

五、证明题

证明：设 $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^2}{2}(x\ge 0)$ 　　$f'(x)=\cos x-1+x$ 　　$f''(x)=1-\sin x\ge 0$

但 $1-\sin x=0$ 的点均为孤立点，不能构成区间 $\therefore f'(x)$ 在 $x\ge 0$ 严格单调递增

$\therefore f'(x)>f'(0)=0$ 　$x>0$ $\therefore f(x)$ 在 $x>0$ 严格单调递增

$f(x)>f(0)=0$ 　　$\therefore \sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

河北省 2009 年专科接本科教育考试数学（二）（财经类）参考答案

一、单项选择题

1. A 评注：本题考查的是 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限问题.

2. D 评注：本题考查的是连续函数的定义.

3. D

4. C 评注：本题考查的是二元函数的偏导数.

5. B 评注：边际成本是总成本的导数.

6. B 评注：本题考查的是二元函数的偏导数.

7. C 评注：本题考查的是变量可分离的微分方程的通解.

8. C 评注：本题考查的是比值判别法及比较判别法.

9. B 评注：本题考查的是函数的导数.

10. A 评注：本题考查的是矩阵的性质.

二、填空题

11. $y=e^{-\sin}\left(x+C\right)$

评注：本题考查的是一阶微分方程的求解问题 $y=e^{-\int p(x)}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)$.

12. $2(1-\frac{\pi}{4})$ 评注：本题考查的是关于奇函数的定积分问题.

13. $\frac{\cos t-t\sin t}{2t}$ 评注：本题考查的是参数方程的求导问题.

14. 2 评注：本题考查的是三阶行列式的计算.

三、计算题

15. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1-\cos t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$

评注：本题考查的是罗必塔法则及积分上限函数的求导公式.

16. 解：$\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x}=\frac{\partial\sin(xyz)}{\partial x}\Rightarrow 1+\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xyz)(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x})$

$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz\cos(xyz)-1}{1-xy\cos(xyz)}$ 评注：本题考查的是隐函数的求导法则.

17. 解：$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx+\int_1^2\frac{1}{x}dx$

$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$，令 $\sqrt{x}=t$，$\int_0^1 2te^t dt=2\int_0^1 tde^t=2te^t\Big|_0^1-2\int_0^1 e^t dt=2$

$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^2=\ln 2$ 原式$=2+\ln 2$ 评注：本题考查的是定积分的换元积分法.

18. 解：$\begin{cases}x^2=2y\\ y=x+4\end{cases}\Rightarrow$ 交点（-2,2），（4,8）

$A=\int_{-2}^4 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x+4}dy=\int_{-2}^4(x+4-\frac{x^2}{2})dx=\left[\frac{x^2}{2}+4x-\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^4=18$

评注：本题考查的是利用元素分析法求平面图形的面积.

19. 解：令 $x-1=t$，原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot 2^n}$ $\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2},\therefore R=2$

当 $t=2$ 时，原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;当 $t=-2$ 时，原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛，收敛域为 $x\in\left[-1,3\right)$

20. 解： $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 又$\because f'(-2)=f'(4)=0$且（-1,10）点在曲线上

$$\therefore\begin{cases}12a-4b+c=0\\48a+8b+c=0\\a+b+c+16=-10\end{cases}$$ 解得 $a=1,b=-3,c=-24$.

四、解答题

21. 解：（1） $(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&2&7\\-1&0&-3\\2&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\therefore a_1,a_2,a_3$ 线性相关

（2） $B\to\begin{pmatrix}1&1&1&-3&3\\2&1&0&-5&4\\3&2&1&-8&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-3&3\\0&1&2&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&1\\0&1&2&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=x_3+2x_4+1\\x_2=-2x_3+x_4+2\end{cases}$

对应齐次方程组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, 特解 $\eta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ 通解为 $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$

（K1，K2 为任意常数）

五、证明题

22. 解：设销售价格为 y，利润为 L

$L=[600-60(y-10)]y-C(1200-60y)=-60y^2+1800y-13000$

$L'=-120y+1800$, 令 $L'=0$ 得唯一驻点 $y=15$ $L''=-120<0$

$\therefore y=15$ 为极大值点，故为最大值点，此时 $L=500$.

河北省 2009 年专科接本科教育考试数学（三）（管理类）参考答案

一、单项选择题

1. D

2. D 评注：本题考查的是第二个重要极限，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2=e^2$

3. B 评注：本题考查的是等级无穷小的概念.

4. B 评注：本题考查的是点导数的定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$ 及求导公式.

5. C 评注：本题考查的是极大（小）值的判定，利用 $f''(x)=6x$ 的符号判定.

6. B 评注：本题考查的是不定积分的分部积分法.

7. C 评注：本题考查的是用元素法求平面图形的面积.

8. A 评注：本题是求变量可分离方程的通解.

9. C 评注：本题考查的是条件收敛的定义.

10. D 评注：本题考查的是三阶行列式的计算.

二、填空题

11. 0 评注：本题考查的是罗比达法则求极限.

12. $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 评注：本题考查的是求矩阵的逆矩阵.

13. $[0,2)$

14. $x-y+1=0$ 评注：本题考查的是函数的导数

三、计算题

15. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^2\tan t dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{x^2\tan x}{4x^3}=\dfrac{1}{4}$ 本题考查的是罗比达法则及积分上限函数的导数.

16. 解：对 $xy-\ln(x+y)=0$ 两边同时求微分

$$d[xy-\ln(x+y)]=0\Rightarrow dy=\frac{1-xy-y^2}{x^2+xy-1}dx$$

评注：本题考查的是隐函数的导数

17. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos xy+1\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos xy-xy\sin xy$ 评注：本题考查的是二元函数的偏导数.

18. 解：$\int_1^2 2x\ln xdx=\int_1^2\ln xdx^2=x^2\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x^2\dfrac{1}{x}dx=4\ln 2-2+\dfrac{1}{2}=4\ln 2-\dfrac{3}{2}$.

评注：本题考查的是分部积分法求定积分.

19. 解：$\int\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+3}dx\underline{\underline{\sqrt{x+1}=t}}\int\dfrac{2t}{t+3}dt=2\int\left(\dfrac{t+3}{t+3}-\dfrac{3}{t+3}\right)dt$

$=2[t-3\ln(t+3)+C]=2\sqrt{x+1}-6\ln(\sqrt{x+1}+3)+C$.

评注：本题考查的是换元积分法求不定积分.

20. 解：$p(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad q(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

$\int p(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C_1, y=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)=\frac{1}{x}(C-\cos x)$.

评注：本题考查的是一阶线性微分方程的通解

四、解答题

21. 解：$B=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\2&-a&1&3\\1&-1&a&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&2-a&-1&1\\0&0&a-1&a-1\end{pmatrix}$

（1）当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时方程组有唯一解；当 $a=1$ 是有无穷多解；当 $a=2$ 时无解.

（2）当 $a=1$ 时 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 同解方程组 $\begin{cases}x_1=2\\x_2=x_3+1\end{cases}$

$\therefore\xi=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 特解 $\eta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\therefore$ 通解 $x=k\xi+\eta$.（K 为任意常数）

五、证明题

22. 证明：设曲线上点 (x_0,y_0)， $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-2x|_{x=x_0}=-2x_0$， $y_0=6-{x_0}^2$

$\therefore$ 过 (x_0,y_0) 的切线方程 $2x_0x+y-y_0-2{x_0}^2=0$ 与 x、y 轴的交点 $(\dfrac{y_0+2{x_0}^2}{2x_0},0)$，$(0,y_0+2{x_0}^2)$，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_0+2{x_0}^2}{2x_0}\cdot\left(y_0+2{x_0}^2\right)=\frac{(y_0+2{x_0}^2)^2}{4x_0}=\frac{(6+{x_0}^2)^2}{4x_0}$$

$S'=\dfrac{(6+{x_0}^2)(12{x_0}^2-24)}{16{x_0}^2}$ 令 $S'=0\Rightarrow x_0=\sqrt{2}$

当 $x_0<\sqrt{2}$ ， $S'<0$； $x_0>\sqrt{2}, S'>0$； $\therefore x_0=\sqrt{2}$ 为极小值点，故为最小值点

此时 $S_{\min}=\dfrac{8^2}{4\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$.

河北省 2010 年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）试题参考答案

一、单项选择题

1. C 评注：因为 $f(x)$ 的定义域是 $[1,3]$，所以有 $1\le 1+x^2\le 3$ 故选 C.

2. D 评注：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-1}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=e^{-1}+1$.

3. C 评注：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x\cos x}=-\dfrac{1}{2}=f(0)=a$.

4. D 评注：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(\arctan t)'}{\left(\ln(1+t^2)\right)'}=\dfrac{1}{2t}$.

5. C 评注：$\vec{a}+\vec{b}=\{0,-1,1+z\}$ $\vec{a}-\vec{b}=\{2,-3,1+z\}$ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 所以有 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$，

即 $1+(1+z)^2=4+9+(1-z)^2$ 得 $z=3$.

6. B 评注：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 利用 P 级数的敛散性, 易知选 B.

7. A 评注：$\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{2}{-4}$ $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 共线, $2\times(-4)+(-1)\times 2+2\times(-4)=-18$, 故选 A.

8. B 评注：非齐次线性微分方程的特解形式, 特征方程 $\lambda^2-1=0$，得 1 是其一阶特征根.

9. D 评注：

$$\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_1&0&0&a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\a_1&0&0&b_1\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&b_2&0&0\\b_3&a_3&0&0\\0&0&a_1&b_1\\0&0&b_4&a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&b_1\\b_3&a_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1&b_1\\b_4&a_4\end{vmatrix}=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$$

10. A 评注：系数行列式由行列式的展开性质得 $\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)^2$

线性方程组有唯一解，故系数行列式不为零.

二、填空题

11. $4\ln 2-8$ 评注：当 $x\ne 0$ 时，$f'(x)=2x-6+\dfrac{4}{x}$， 令 $f'(x)=0$ 得稳定点为 $x=1,x=2$

$f''(x)=2-4x^{-2}$　$f''(1)=-2<0$　$f''(2)=1>0.$

由极值的充分条件得极小值点是 $x=2$，极值是 $f(2)=4\ln 2-8$

12. $\dfrac{9}{2}$ 评注：$\int_{-1}^{2}\left[(y+2)-y^2\right]dy=\dfrac{9}{2}$.

13. -18π 评注：利用格林公式得

$$\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint_{x^2+y^2\le 9}\left[(2x-4)-(2x-2)\right]dxdy=-18\pi.$$

14. 3 评注：$\dfrac{\left|\dfrac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}\right|}=\left|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right)\right|\to\dfrac{1}{3}(n\to\infty)$，故 $R=3$.

15. $2x+y-4=0$ 评注：$F(x,y,z)=z-e^x+2xy$ 在 $(1,2,0)$ 处 $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)=(4,2,0)$

所以此点处的切平面方程是 $4(x-1)+2(y-2)+0(z-0)=0$.

三、计算题

16. 解：

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^2 u^2 f''(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\int_0^2 u^2\mathrm{d}f'(u)=\left[\frac{1}{8}u^2 f'(u)\right]_0^2-\frac{1}{8}\int_0^2 f'(u)\cdot 2u\mathrm{d}u$$

$$=0-\frac{1}{4}\int_0^2 u\mathrm{d}f(u)=-\frac{1}{4}\left[uf(u)\right]_0^2+\frac{1}{4}\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u=-\frac{6}{4}+\frac{1}{4}\cdot 2=-1.$$

17. 解：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{y}{\sqrt{1+y^3}}\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}(1+y^3)=\left[\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{1+y^3}\right]_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$$

18. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(e^{x+y})+xf'(e^{x+y})\cdot e^{x+y}=f(e^{x+y})+xe^{x+y}f'(e^{x+y})$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(e^{x+y})\cdot e^{x+y}+e^{x+y}f'(e^{x+y})+xe^{x+y}f'(e^{x+y})+xe^{x+y}f''(e^{x+y})\cdot e^{x+y}$$

$$=(2+x)e^{x+y}f'(e^{x+y})+xe^{2(x+y)}f''(e^{x+y})$$

19. 解：$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ 在 $A^{-1}BA=6A+BA$ 两边右乘以 A^{-1}，得 $A^{-1}B=6E+B$，

即 $\left(A^{-1}-E\right)B=6E$，于是 $B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}$

$$=6\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{2}{3}&0\\0&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&0&0\\0&-9&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$$

四、证明题

20. 证明：$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $r^2+r-2=0$，

解之得 $r_1=1,\quad r_2=-2$，所以 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

由 $f(a)=f(b)=0$ 得 $\begin{cases}C_1e^a+C_2e^{-2a}=0\\C_1e^b+C_2e^{-2b}=0\end{cases}$ 解此方程组得 $C_1=C_2=0$

所以 $f(x)\equiv 0$，$\forall x\in[a,b]$.

河北省 2010 年专科接本科教育考试数学（二）（财经类）试题参考答案

一、单项选择题

1. B 评注：$1-x\geq 0$ 且 $-1\leq\frac{x+1}{2}\leq 1$ 得 $x\in[-3,1]$.

2. D 评注：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=0-1=-1$.

3. D 评注：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a+x^2\right)=a$

由连续函数的定义得 $a=\sqrt{e}$.

4. A 评注：$y'(0)=0$，故法线方程为 $x=0$.

5. A 评注：定义域为 $(-\infty,+\infty)$ $\quad f'(x)=e^x-1=0$ 得 $x=0$

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$ 即 $f(x)$ 递增；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$ 即 $f(x)$ 递减.

6. C 评注：原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=2$.

7. C 评注：变量分离方程求解$\tan x\dfrac{dy}{dx}-y=0$

可化为 $\dfrac{1}{y}dy=\dfrac{\cos x}{\sin x}dx,\ln y=\ln\sin x+C_1,y=C\sin x$.

8. D 评注：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{xy}=\dfrac{1}{x}$ $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{xy}=\dfrac{1}{y}$.

9. B 评注：由P级数的敛散性知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散；由比式判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{4^n}$收敛；由莱布尼茨判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛.

10. C 评注：$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&0\\1&2&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4\\2&3&0\\2&0&0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}3&4\\3&0\end{vmatrix}=24$

二、填空题

11. $-x^2\sin 2xdx$

12. $-\sin x+C_1x+C_2$

13. $2x+1$ 评注：$\left[\int_0^x f(t)dt\right]'=f(x)+xf'(x)-2x$ $\quad f(x)=f(x)+xf'(x)-2x$

$f'(x)=2$ $\quad f(x)=2x+c$ $\quad$ 由于$f(0)=1$得$c=1$.

14. 3 评注：幂级数在$x=0$处收敛，结合已知得$R=3$.

15. $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 评注：$A^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ $\quad A^TA=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$

三、计算题

16. 解：

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin(2x)}{x\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin(2x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos(2x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin(2x)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

17. 解：设$t=\sqrt{x}$，则

$$\int_0^{\pi^2}\cos\sqrt{x}dx=2\int_0^{\pi}t\cos tdt=2\int_0^{\pi}td\sin t=2[t\sin t]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\sin tdt=2[\cos t]_0^{\pi}=-4.$$

18. 解：由曲线$y=|\ln x|$与直线$x=\frac{1}{e}$，$x=e$，$y=0$所围成的平面图形的

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx+\int_1^e\ln xdx$$

$$=-\{[x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}xd\ln x\}+\{[x\ln x]_1^e-\int_1^e xd\ln x\}$$

$$=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+[x]_{\frac{1}{e}}^{1}+e\ln e-[x]_1^e=2-\frac{2}{e}.$$

19. 解：增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\-2&-4&1&-3&4\\4&8&-3&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\0&0&-1&-1&6\\0&0&1&1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)r_2]{r_3+r_2;\quad r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&2&-5\\0&0&1&1&-6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以同解方程组为$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4=-5\\x_3+x_4=-6\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_4-5\\x_3=-x_4-6\end{cases}$

故原方程组的通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k_1-2k_2-5\\k_1\\-k_2-6\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\0\\-6\\0\end{pmatrix}$; k_1,k_2为任意实数.

四、解答题

20. 解：（1） $f'(p)=-2p$

所以需求弹性函数为：$\eta(p)=-f'(p)\cdot\frac{p}{f(p)}=-(-2p)\cdot\frac{p}{75-p^2}=\frac{2p^2}{75-p^2}$.

（2） $p=5$时的边际需求为$f'(5)=-2\cdot5=-10$.

（3）总收益$R=75p-p^3$，$R'=75-3p^2$

令$R'=0$，则$p=5$. 因为$R''(5)<0$，所以当$p=5$时，总收益最大. 最大总收益为$R(5)=250$.

河北省 2010 年专科接本科教育考试数学（三）（财经类）试题参考答案

一、单项选择题

1. A 评注：$x-2>0$ 且 $9-x^2>0$ 的定义域为 $(2,3)$.

2. B 评注：由罗比达法则有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin kx}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2k\cos kx}{3}=\dfrac{2k}{3}=\dfrac{3}{2}$.

3. B 评注：原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\cdot 3=3f'(x_0)=1$.

4. D 评注：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

5. D 评注：$f'(x)=x^2-1$　$f'(1)=0$　$f''(x)=2x$　$f''(1)=2>0$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-\dfrac{2}{3}$　$f(-2)=-\dfrac{8}{3}+2=-\dfrac{2}{3}$　$f(2)=\dfrac{8}{3}-2=\dfrac{2}{3}$.

6. C 评注：$\int xf(1-x^2)dx=\int\dfrac{1}{2}f(1-x^2)dx^2=-\dfrac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)=-\dfrac{1}{2}\left[(1-x^2)^2+c_1\right]$

$=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+c$.

7. C 评注：$y'(x)=2x+1=3$　得 $x=1$，$y(1)=0$　故 $M(1,0)$.

8. A 评注：$\dfrac{xdy}{dx}=2y$　$\dfrac{dy}{\frac{1}{y}}=\dfrac{2}{x}dx$　$\ln y=2\ln x+c$　$y=cx^2$.

9. D 评注：由根式判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^2}$ 收敛，由莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 收敛.

10. C 评注：由行列式的展开性质得 $\begin{vmatrix}k&1&0\\-4&k&2\\0&-2&1\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}k&2\\-2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-4&2\\0&1\end{vmatrix}=k^2+4k+4=0$

二、填空题

11. $\int_1^3\left[(4-x)-\dfrac{3}{x}\right]dx=4-3\ln 3$

12. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\frac{0-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-(x^2+y^2)-(0-y)2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

13. 2 评注：$\dfrac{1/2^{n+1}\sqrt{n+1}}{1/2^{n}\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}\to\dfrac{1}{2}(n\to\infty)$ 　故 $R=2$.

14. $\begin{pmatrix}0 & 9\\ 1 & -23\end{pmatrix}$ 评注：$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 1 & -23\end{pmatrix}$$

15. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$ 评注：$\dfrac{dy}{dx}-\left(e^y+xe^y\dfrac{dy}{dx}\right)=0$ 　$\dfrac{dy}{dx}-e^y-xe^y\dfrac{dy}{dx}=0$ 　$\dfrac{dy}{dx}(1-xe^y)=e^y$ 　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$

三、计算题

16. 解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{x(x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{1+\cos x}=\dfrac{3}{2}.$

17. 解：令 $\sqrt{e^t-1}=u$，则 $t=\ln(1+u^2)$，$dt=\dfrac{2u}{1+u^2}du$，当 $t=\ln 2$ 时 $u=1$，当 $t=x$ 时 $u=\sqrt{e^x-1}$，

$$\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=\int_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{2}{1+u^2}du=2\arctan u\Big|_{1}^{\sqrt{e^x-1}}$$

$=2[\arctan\sqrt{e^x-1}-\dfrac{\pi}{4}]$ 　故有 $2[\arctan\sqrt{e^x-1}-\dfrac{\pi}{4}]=\dfrac{\pi}{6}$

$\arctan\sqrt{e^x-1}=\dfrac{\pi}{3}$ ，解得 $x=2\ln 2$.

18. 解：$\int xe^{-2x}dx=-\dfrac{1}{2}\int xde^{-2x}=-\dfrac{1}{2}xe^{-2x}+\dfrac{1}{2}\int e^{-2x}dx$

$$=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}\int e^{-2x}d(-2x)=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C.$$

19. 解：对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -a & -2 & -1\\ 1 & -1 & a & 2\\ 5 & -5 & -4 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -a & -2 & -1\\ 0 & -1+a & a+2 & 3\\ 0 & 5a-5 & 6 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -a & -2 & -1\\ 0 & -1+a & a+2 & 3\\ 0 & 0 & -4-5a & -9\end{pmatrix}$$

1、当 $a\neq1$ 且 $a\neq-\dfrac{4}{5}$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组有唯一解；

2、当 $a=-\dfrac{4}{5}$ 时，$r(A)<r(\overline{A})$，方程组无解；

3、当 $a=1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$ 方程组有无穷多解；

四、解答题

20. 解：设水池宽（深）为x，长为y，容积为V，则$V=x^2y$

且满足条件$xy+1.5(2x^2+2xy)=a$　所以 $y=\dfrac{a-3x^2}{4x}$

$V(x)=\dfrac{ax-3x^3}{4}$　$(x>0)$　　$V'(x)=\dfrac{a-9x^2}{4}$

令$V'(x)=0$，得驻点$x_1=\dfrac{1}{3}\sqrt{a}$ ，$x_2=-\dfrac{1}{3}\sqrt{a}$（舍去）

因为$V''(\dfrac{\sqrt{a}}{3})=-\dfrac{3}{2}\sqrt{a}<0$，且驻点唯一　所以当$x_1=\dfrac{1}{3}\sqrt{a}$ 时，V取得最大值，此时长 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{a}$. 因此当宽（深）为$\dfrac{1}{3}\sqrt{a}$ ，长为$\dfrac{1}{2}\sqrt{a}$时，水池容积最大.

河北省 2011 年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）试题参考答案

一、 单项选择题

1. A 评注：$f(0)=0$　　$f(f(0))=f(0)=0$.

2. B 评注：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2-1)=-1$　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}3^x=1$.

3. B

4. C 评注：$y'=3(x+2)^2$　$y''=6(x+2)$　令$y''=0$得：$x=-2$

当$x<-2$是，$y''<0$　　$x>-2$时，$y''>0$.

5. C 评注：两边同时对x求导，得 $1-2y'+\cos y\cdot y'=0$，将$x=0$，$y=0$代入得：$y'\big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$.

6. C 评注：$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\frac{1}{n}}}$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^{\frac{1}{n}}}=1$.

7. D 评注：$e^{-y}dy=e^xdx$ 两边积分$\int e^{-y}dy=\int e^xdx$，$-e^{-y}=e^x+C_1\Rightarrow e^x+e^{-y}=C$

8. B 评注：$\int\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x=F(\ln x)+C$

9. D 评注：方阵行列式的性质.

10. D 评注：$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

二、填空题

11. $1+e$ 评注：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{\sin x}{x}+e\right)=e+1$ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}+1=e+1$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=e+1$ $f(0)=k$ 由连续$k=e+1$.

12. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-1}{2}$

评注：直线的方向向量为$\vec{S}=\{1,-4,2\}$ $\therefore$ 直线的对称方程为$\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-1}{2}$.

13. $\frac{\pi^2}{4}$ 评注：$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2xdx=\frac{\pi}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2x)dx=\frac{\pi^2}{4}$.

14. $\frac{1}{4}$ 评注：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}=\frac{1}{4}$.

15. $\frac{1}{8}$ 评注：$\int_0^1dx\int_0^1xy^3dy=\int_0^1\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{8}$.

三、计算题

16. 解：令 $x+1=t$ $dx=dt$

原式$=\int_{-1}^1f(t)dt=\int_{-1}^0(1-t)dt+\int_0^1e^{-t}dt=-\frac{1}{2}(1-t)^2\Big|_{-1}^0-e^{-t}\Big|_0^1=\frac{5}{2}-e^{-1}$.

17. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial f}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2y^2f_u'+f_v'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2x^3yf_u'+f_v'$.

18. 解：$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy,\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2\sin2y+z\cdot\ln3\cdot3^{yz},\frac{\partial u}{\partial z}=y\cdot3^{yz}\ln3,$.

$du=2xydx+\left(x^2-\sin2y+z\cdot\ln3\cdot3^{yz}\right)dy+y\cdot3^{yz}\ln3dz$

19. 解：增广矩阵$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-3&2&1&0\\2&-5&3&-1&1\\1&-3&2&1&\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&2&1&0\\0&1&-1&-3&1\\0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}$ $\therefore$ 当$\lambda=0$时，方程组有解.

$\lambda=0,$ $\overline{\mathrm{A}}\to\begin{bmatrix}1&-3&2&1&0\\0&1&-1&-3&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-8&3\\0&1&-1&-3&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

通解方程组$\begin{cases}x_1=3+x_3+8x_4\\x_2=1+x_3+3x_4\end{cases}$　$\therefore$通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}8\\3\\0\\1\end{bmatrix}$　k_1，$k_2\in R$

四、解答题

20. 证明：令$f(x)=x^3-4x^2+1$

$f(x)$在$[0,1]$上连续　$f(0)=1>0$　$f(1)=-2<0$

由零点存在定理知，存在$\xi\in(0,1)$使$f(\xi)=0$，即ξ是方程$x^3-4x^2+1=0$的根.

河北省2011年专科接本科教育考试数学（二）（财经类）试题参考答案

一、单项选择题

1. C 评注：$\begin{cases}x+1>0\\x^2-9>0\end{cases}\Rightarrow x>3$.

2. D 评注：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-2}=e^{-2}$.

3. A 评注：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin ax}{x}=a$　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\cos\dfrac{1}{x}+2\right)=2$

$f(0)=b$　$a=2=b$.

4. A 评注：两边对x求导得：$e^y\cdot y'=y+xy'$　$\therefore y'=\dfrac{y}{e^y-x}$.

5. D 评注：$y'=3x^2-6x$　$y''=6x-6$　$y''\ge0\Rightarrow x\ge1$.

6. B 评注：$R'(x)=10-x$　$R'(12)=-2$.

7. B 评注：$\int e^{-x}f(e^{-x})dx=-\int f(e^{-x})de^{-x}=-F(e^{-x})+c$.

8. D 评注：$y=e^{\int dx}\left(\int e^xe^{-\int dx}dx+c\right)=e^x(x+c)$　由$y|_{x=0}=0$得$c=0$　$\therefore y=xe^x$.

9. C 评注：系数行列$D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

当 $D=0$ 时，即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时，方程组有非零解.

10. C 评注：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ p 级数，$p=\frac{1}{2}$ 时发散.

二、填空题

11. x^2e^x+c 评注：$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=xf(x)-xe^x+c$

$f'(x)=\left(xe^x\right)'=(x+1)e^x$ 代入上式可得.

12. 3 评注：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}}{(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}}\right|=3$.

13. $\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}$ 评注：$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}$.

14. 2 评注：$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}|A|=\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}$ $\therefore |A|=2$.

15. e^{cx} 评注：分离变量得：$\frac{dy}{d\ln y}=\frac{dx}{x}$ $\ln|\ln y|=\ln|x|+C_1$, $\therefore y=e^{cx}$.

三、计算题

16. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$.

17. 解：$S=\int_{-1}^{2}(x+2)dx-\int_{-1}^{2}x^2dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

18. 证明：$F(x,y,z)=\sin(2x+3y-5z)-2x-3y+5z$

$F_x=2\cos(2x+3y-5z)-2$ $F_y=3\cos(2x+3y-5z)-3$

$F_z=-5\cos(2x+3y-5z)+5$. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2-2\cos(2x+3y-5z)}{5-5\cos(2x+3y-5z)}=\frac{2}{5}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3-3\cos(2x+3y-5z)}{5-5\cos(2x+3y-5z)}=\frac{3}{5}$, $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

19. 解：增广矩阵

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\1&1&2&-1&3\\2&2&1&4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&0&1&-2&1\\0&0&-1&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&2\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&3&1\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

同解方程为$\begin{cases}x_1=1-x_2-3x_4\\x_3=1+2x_4\end{cases}$，

对应的齐次线性方程组的一个基础解析为：

$\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\xi_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\1\end{bmatrix}$， 一个特解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\1\end{bmatrix}$，

（k_1,k_2为任意常数）

四、解答题

20. 解：价格$P(Q)=10-\dfrac{Q}{5}$ 成本$C(Q)=50+2Q$ 总收益$R(Q)=Q\cdot P(Q)=10Q-\dfrac{Q^2}{5}$

总利润为$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)=8Q-\dfrac{Q^2}{5}-50$

$L'=8-\dfrac{2Q}{5}$ 令$L'=0$ 得$Q=20$ $\because L''(Q)=-\dfrac{2}{5}$ $L''(20)=-\dfrac{2}{5}<0$

$\therefore$ 当$Q=20$时，总利润L最大，最大利润为$L(20)=30$.

河北省 2011 年专科接本科教育考试数学（三）（管理类）试题参考答案

一、单项选择题

1. B 评注：定义域相同对应法则一致即表示同一函数.

2. C 评注：考查重要极限.

3. B 评注：$f(x)$在x_0处连续是$f(x)$在x_0处可导的必要条件.

4. C 评注：$\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\le 1$ $x\to 0$时$\cos\dfrac{1}{x}$极限不存在.

5. A 评注：注意不定积分与导数的关系.

6. D 评注：$\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx=\int_0^1(1-\dfrac{x}{1+x})dx=1-\ln 2$.

7. D 评注：$y'=\sec^2 x$ $\quad y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2$.

8. A

9. A 评注：分离变量得：$ydy=-xdx$ $\quad \frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+c_1$ $\quad x^2+y^2=c$.

10. D 评注：考查伴随矩阵的定义.

二、填空题

11. $\frac{1}{6}$ 评注：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}$

12. 1 评注：$R=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}}{(-1)^n\frac{1}{n+1}}\right|=1$

13. -2 评注：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$.

14. $\ln 2$ 评注：$A=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2$.

15. 0 评注：$\begin{vmatrix}5&7&9\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&-6\\1&2&3\\0&-3&-6\end{vmatrix}=0$.

三、计算题

16. 解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$ $\quad f(0)=a\ \therefore a=1$.

17. 解：$\int_{-1}^{\sqrt3}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{\sqrt3}\arctan x d(\arctan x)=\frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_{-1}^{\sqrt3}=\frac{1}{2}\left[(\frac{\pi}{3})^2-(-\frac{\pi}{4})^2\right]=\frac{7\pi^2}{288}$

18. 解：方程两边对x求导得 $y+xy'=e^x-e^y y'$ 化简得 $y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}$

把$x=0$代入原方程得$y=0$ 所以$y'(0)=1$.

19. 解：增广矩阵$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&\lambda\\0&1&2&6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-6&\lambda-3\\0&1&2&6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-6&\lambda-3\\0&0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$

当$\lambda=0$时，原方程组有解. 此时增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-6&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-5&-2\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

则解为$\begin{cases} x_1=-2+x_3+5x_4 \\ x_2=3-2x_3-6x_4 \end{cases}$ 通解为$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\\3\\0\\0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} 1\\-2\\1\\0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 5\\-6\\0\\1 \end{pmatrix}$

四、解答题

20. 解：设所围矩形的长为x cm，则宽为$16-x$ cm.所围矩形面积

$S(x)=x(16-x)=-x^2+16x$ $S'(x)=-2x+16$ 令$S'(x)=0$，则$x=8$

由于只有唯一驻点，根据实际问题，$x=8$必为所求.则所围矩形的长为8 cm，宽为8 cm时面积最大.

河北省2012年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）试题参考答案

一、单项选择

1. A 评注：$f[g(x)]=\dfrac{1-(1-x)}{1-x}=\dfrac{x}{1-x}$.

2. D 评注：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1$.

3. B 评注：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=e^{-1}$ $k=e^{-1}$.

4. C 评注：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(tx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t\cdot f'(tx)}{1}=tf'(0)$.

5. A 评注：设半平面$2x+3y=0$法向量$\vec{n}_1=(2,3,0)$，半平面$7y+2z=0$法向量$\vec{n}_2=(0,7,2)$则空间直线L

方向向量$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2,\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}=6\vec{i}-4\vec{j}+14\vec{k}$ $\therefore\vec{n}=(6,-4,14)$，

平面：$3x-2y+7z=8$法向量是$\vec{n}_3=(3,-2,7)$ $\therefore\dfrac{6}{3}=\dfrac{-4}{-2}=\dfrac{14}{7}=2$ $\therefore\vec{n}//\vec{n}_3$ $\therefore$空间直线L和平面

$3x-2y+7z=8$相垂直.

6. C 评注：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin na}{n^2}$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散 .

7. B 评注：$|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}=9$.

8. A 评注：线性相关的充要条件 .

9. B 评注：特征方程 $r^2-2r+1=0$　$(r-1)^2=0$　$r_1=r_2=1$　$y^*=(ax+b)x^2e^x$.

10. D 评注：驻点不一定是极值点.

二、填空题

11. $2e^2+2$ 评注：令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，$dx=2tdt$

原式 $=2\int_0^2 te^t dt=2\int_0^2 td\left(e^t\right)=2te^t\Big|_0^2-2\int_0^2 e^t dt=2e^2+2$.

12. 12 评注：$\iint\limits_D 4d\sigma=4\cdot s=12$.

13. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{4}$ 且 $y=-3$

评注：垂足为 $B(0,-3,0)$ 因此直线方向向量 $\vec{BA}=(2,0,4)$，由此可得直线方程.

14. $y=Ce^{-\int\frac{1}{x}dx}=\dfrac{C}{x}$ 评注：$y'+\dfrac{1}{x}y=0$，$y=Ce^{-\int\frac{1}{x}dx}=\dfrac{C}{x}$.

15. $-1\le x<3$ 评注：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)}{2^n\cdot n}=2$，

$|x-1|<2$，收敛域 $-1\le x<3$.

三、计算题

16. 解：$y'=2x,k=2$　切线：$y-1=2(x-1)$　$y=2x-1$

$$S=\int_0^1 x^2dx-\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\left(x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

17. 解：令 $u=x,v=\dfrac{x}{y},z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)=f(u,v),\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u'+\dfrac{1}{y}f_v'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_{uv}''-\frac{1}{y^2}f_v'-\frac{x}{y^3}f_{vv}''$$

18. 解：对 $(A\,|\,b)$ 进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-k_1&15&3\\1&-5&-10&12&k_2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \lrcorner\times-1\\ \lrcorner\times-3\\ \lrcorner\times-1\end{array}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-k_1-6&6&0\\0&-6&-12&9&k_2-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&2-k_1&2&4\\0&0&0&3&k_2-5\end{array}\right)$$

(1) $k_1 \neq 2$ 时，唯一解，$r(A)=r(A|b)=4=n$

(2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2-5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-11 \end{array}\right)$

$k_1=2, k_2 \neq 11$ 时，无解 $r(A)=3 \neq r(A|b)=4$

(3) $k_1=2, k_2=11$ 时，有无穷多解

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 - 2x_3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$，$x_3$ 是自由未知量，取 (0) 得特解 $\eta=(-8,3,0,2)^T$

方程组的导出组 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

x_3 是自由未知量，取 (1) 得基础解析，$\xi=(0,-2,1,0)^T$，$x=\eta+c_1\xi$，c 为任意常数.

19. 解：$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma = \iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 (1+\rho^2)\ d(1+\rho^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 2\rho d\rho\right] = \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1)$$

四、证明题

20. 解：(1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$

$\because f(x)>0 \therefore f(x)+\dfrac{1}{f(x)} \geq 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2 \Rightarrow F'(x) \geq 2$

(2) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(a)=\int f(t)dt+\int_b^a \dfrac{dt}{f(t)} = -\int_a^b \dfrac{dt}{f(t)}$

在 $[a,b] f(x)>0$, 则 $\int_a^b \dfrac{1}{f(\mathrm{t})}dt>0$, 即 $f(a)<0$

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt=\int_a^b f(t)dt>0$$

根据上题结论 $F'(x)\geq 2$ 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调. 结论：有且仅有一个根，使得 $F(\xi)=0$.

21.解：设内接于球的长方体的长、宽、高分别是 x,y,z，长方体的对角线长为球的直径，即 $x^2+y^2+z^2=(2a)^2$, 长方体的体积 $V=xyz$，设 $f(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-4a^2)$,

依次求偏导，并令其为 0：$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=yz+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=xz+2\lambda y=0,\Rightarrow x=y=z\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=xy+2\lambda z=0\end{cases}$

又∵ $x^2+y^2+z^2-4a^2=0$，得到 $x=y=z=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，长方体的体积最大，此时 $V=xyz=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}a^3$.

河北省 2012 专科接本科教育考试数学（二）（财经管理类)试题参考答案

一、单项选择

1. B

2. A 评注：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-3\cos 3x}{1}=-2$.

3. B 评注：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=a$，$a=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

4. D 评注：$y-xe^y=1\Rightarrow y-xe^y-1=0$ $\quad y'=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{-e^y}{1-xe^y}=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$.

5. C 评注：$y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad y'=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad (0,+\infty)$，$y'<0$ $\quad (0,+\infty)$ 单调递减

   $y''=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$ $\quad y''<0$ $\quad (-1,1)$ 凸区间

   即 $(0,1)$ 为 $f(x)$ 的单调递减凸区间.

9、C 评注：$\int_{-1}^1\dfrac{x^3+1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^1\dfrac{x^3}{1+x^2}dx+\int_{-1}^1\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$$=0+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=2\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$.

7. D 评注：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$　　$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$

$$dz=2xydx+\left(x^2+2y\right)dy \qquad dz\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=4dx+6dy$$.

8. C 评注：根据收敛半径公式：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)}{2^n\cdot n}=2 \qquad |x-2|<2 \quad 即 0<x<4$$.

（1）B 评注：$y'=y-1\Rightarrow y'-y=-1$

$$y=e^{-\int -1dx}\left(\int -1\cdot e^{\int -1dx}dx+C\right)=e^x\left(e^{-x}+C\right)=Ce^x+1$$

将 $y\big|_{x=0}=2$ 代入 y 得 $c=1$　　$y=1+e^x$.

10. A 评注：$\begin{vmatrix}1&1&0&2\\0&3&2&1\\0&3&0&0\\0&1&2&4\end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}=\begin{vmatrix}3&2&1\\3&0&0\\1&2&4\end{vmatrix}=a_{21}\cdot A_{21}=-3\begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}=-18$

二、填空题

11. $2x^2e^{2x}+C$ 评注：$\int xf''(x)dx=\int xdf'(x)=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C$

$$f(x)=xe^{2x} \qquad f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(2x+1)$$

$$\int xf''(x)dx=xe^{2x}(2x+1)-xe^{2x}+C=2x^2e^{2x}+C.$$

12. $e_d=\frac{P}{4}$ 评注：需求弹性 $e_d=-\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}$，$\frac{dQ}{dP}=-\frac{1}{4}e^{-\frac{P}{4}}$，$e_d=-\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{P}{4}}\right)\cdot\frac{P}{e^{-\frac{P}{4}}}=\frac{P}{4}$.

13. 小 评注：根据多元函数极值的必要条件可知 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极小值.

14. $\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 评注：$A-2E=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$|A-2E|=2$

$A_{11}=2 \quad A_{21}=0 \quad A_{31}=0$

$A_{12}=-1 \quad A_{22}=1 \quad A_{32}=0$

$A_{13}=0 \quad A_{23}=0 \quad A_{33}=2$

$$(A-2E)^*=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$(A-2E)^{-1}=\frac{(A-2E)^*}{|A-2E|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

15. 2 评注：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 发散 ， $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ 条件收敛.

三、计算题

16. 解：$\lim_{x\to0}\frac{\int_x^0(1-\cos t)dt}{x-\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos x)}{1-\sec^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{-\tan^2 x}=\frac{1}{2}$.

17. 解：$\int_1^e x\ln xdx=\int_1^e \ln xd\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{x^2}{2}d(\ln x)$

$$=\frac{e^2}{2}+\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

18. 解：对增广矩阵 $(A\,|\,b)$ 进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&1&-1&-2&9\\0&0&0&-2&-4\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&1&-1&-2&9\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A\,|\,b)=3<n$ 无穷解 $\begin{cases}x_1+x_3=-8\\x_2-x_3=13\\x_4=2\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-8-x_3\\x_2=13+x_3\\x_4=2\end{cases}$

x_3 是自由未知量，取(0)得特解 $\eta=(-8\quad 13\quad 0\quad 2)^T$

原方程的导出组为 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\\x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\\x_4=0\end{cases}$

x_3 是自由未知量，取(1)得基础解析 $\xi=(-1\quad 1\quad 1\quad 0)^T$

方程组的全部解 x_3 是自由未知量，取(0)得特解 $x=\eta+C\xi$ （C 为任意常数).

19. 解：

$$f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x-2+3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{x-2}{3}+\frac{(x-2)^2}{3^2}-\frac{(x-2)^3}{3^3}+\cdots\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$$

$(-1<x<5)$

四、解答题

20. 解：（1）$C=200+5Q, C''=5$.　　（2）$R=\int_0^Q(10-0.02Q)dQ=10Q-0.01Q^2$.

(3) $C'=R'$ 时 L 最大，即 $5=10-0.02Q$　　$Q=250$（吨）. 最大利润为 425 万元.

河北省 2012 年专科接本科教育考试数学（三）（农学类）试题参考答案

一、单项选择

1. C 评注：A 非奇非偶，B 偶×偶＝偶，C 奇函数，D 偶函数 .

2. B 评注：根据零位×无穷得 $e^{-1}=\frac{1}{e}$.

3. B 评注：$y'=-\frac{1}{x^2}$　在 $\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 处的斜率为 $-\frac{1}{{x_0}^2}$ 得切线方程 $y=-\frac{1}{{x_0}^2}x+\frac{2}{x_0}$

令 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 得 $y=\frac{2}{x_0}$　$x=2x_0$　即所围三角形 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x_0}\cdot 2x_0=2$.

4. D 评注：根据极值的定义可得.

5. A 评注：上下限对称，被积函数为奇函数，积分值为 0.

6. B 评注：$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)=0$　得驻点 $x_1=0$，$x_2=1$

在 $(0,1)$ 内，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上，单调递减.

7. D 评注：根据导数定义 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ ，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$.

8. A 评注：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq0$　发散.

9. B 评注：$y'+p(x)y=q(x)$　$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$

即　$y=e^{-\int -1dx}\left(\int 1e^{\int -1dx}dx+C\right)=ce^{-x}-1$.

10. C 评注：当$a=1$时，行列式其中两行（列）相同，则行列式值为0.

二、填空题

11. 2 评注：根据连续定义可知：

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(2+x)=2,\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin kx}{x}=k\Rightarrow k=2.$$

12. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y)^2}$ 评注：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y)^2}$.

13. e 评注：幂级数的收敛半径公式为：$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

14. $\begin{pmatrix}10&2\\2&5\end{pmatrix}$ 评注：$A^T=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&0\end{pmatrix}$，　$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&2\\2&5\end{pmatrix}$

15. $y=2\sqrt{1+x^2}$　评注：$y'=\frac{x}{1+x^2}y$ 即 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1+x^2}y$，$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{1+x^2}dx$，

$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$，$\ln|y|=\ln\sqrt{1+x^2}+\ln C$，$\ln|y|=\ln\left(C\sqrt{1+x^2}\right)$，$y=\left(C\sqrt{1+x^2}\right)$

将$y(0)=2$代入得$c=2$　特解$y=2\sqrt{1+x^2}$.

三、计算题

16. 解：$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t(e^t-1)dt}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t(e^t-1)dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x(e^x-1)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

17. 解：$dy=f(x)dx$，$y'=-\sin xe^{\cos x}+\frac{1}{(1+x)\cdot2\sqrt{x}}$，$dy=\left[-\sin xe^{\cos x}+\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}\right]dx$

18. 解：$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int_1^e\ln x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x}d(\ln x)=-\frac{1}{e}+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big|_1^e=1-\frac{2}{e}$

19．解：对增广矩阵$(A\,|\,b)$进行初等行变换$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\2&0&1&-1\\1&2&k&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-4&1&-1\\0&0&k&1\end{array}\right)$

（1）当$k=0$时，有$r(A)=2\neq r(A\,|\,b)=3$；

（2）当$k\neq 0$时，$r(A)=r(A\,|\,b)=3=n$唯一解

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-4&1&-1\\0&0&k&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-4&0&-1-\frac{1}{k}\\0&0&k&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\\0&1&0&\frac{1}{4}+\frac{1}{4k}\\0&0&1&\frac{1}{k}\end{array}\right)$，此时$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\\x_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4k}\\x_3=\frac{1}{k}\end{cases}$

四、解答题

20．解：$y=x^2$与$y=cx$求得交点$A(c,c^2)$．$s_1=\int_0^c cxdx-\int_0^c x^2dx=\frac{c^3}{2}-\frac{c^3}{3}=\frac{c^3}{6}$

$s_2=\int_c^1 x^2dx-\int_c^1 cxdx=\frac{1}{3}-\frac{c^3}{3}-\frac{c}{2}+\frac{c^3}{2}=\frac{1}{3}-\frac{c}{2}+\frac{c^3}{6}$，　$s=s_1+s_2=\frac{1}{3}-\frac{c}{2}+\frac{c^3}{3}$

$s'=c^2-\frac{1}{2}=0,c=\frac{\sqrt{2}}{2},s''=2c,s''_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2}>0$，极小值$S_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

河北省2013年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）试题参考答案

一、单项选择

1.B 2. A 3. C 4. B 5. A 6. D 7. C 8. D 9. C 10. A

二、填空题

11、$\frac{1}{2}$　12、$-x\sin x-\cos x+C$　13、$\frac{5}{12}$　14、$e^y=e^x+2x^2+C$　15、1

三、计算题

16、 解：作x轴如图，取深度x为积分变量$2\le x\le 5$

相应于$[2,5]$上任小区间$[x,x+dx]$的一薄层水高度为dx

水的密度为ρ，这薄层水的重力为$\pi R^2H\rho g=4\pi\rho gdx$

这薄层水吸出桶外所需的功为$dW=4\pi\rho gxdx$

于是所求的功为$W=\int_2^5 4\pi\rho g x dx=2\pi\rho g x^2\Big|_2^5=42\pi\rho g(J)$

【注：方法二此题亦可使用传统物理方法解决，

将全部水看做一个整体，重力为$4\pi\rho g\cdot 3=12\pi\rho g(N)$

而整体的水可以看做一个质点，中心位于3 米水柱中点，即距桶底1.5 米位置，将全部水吸出的问题等价于将此质点升至桶口，即上移3.5 米。

所做的全部功$W=12\pi\rho g\cdot 3.5=42\pi\rho g(J)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

二、解：
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cdot f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot f''\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)$$

$$=\frac{xy}{(x^2+y^2)}\left[f''\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$$

三、解：增广矩阵

$$(A|B)=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&2&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\-2&1&1&-2\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&0&0&\lambda^2+\lambda-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

$r(A)=r(A|B)=2$时，方程组有解

$\therefore\lambda_1=1,\lambda_2=-2$时，方程组有解

（1）当$\lambda=1$时

$$(A|B)\to\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=x_3\end{cases}$，全部解$\begin{cases}x_1=1+c_1\\x_2=c_1\\x_3=c_1\end{cases}$，（C1为任意常数）

（2）当$\lambda=-2$时

同解方程组为$\begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}$，对应的齐次方程组为$\begin{cases} x_1 = 2 + c_2 \\ x_2 = 2 + c_2 \\ x_3 = c_2 \end{cases}$，（C2为任意常数）

19、解：令$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则$r \in [0,1]$，$\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

原式=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 5r^2\cos^2\theta \cdot r \cdot \sin\theta \cdot r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^1 5r^4 dr$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\cos\theta \cdot \left(r^5\right)\Big|_0^1 = -\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

方法二：先对y积分，后对x积分，则

$$D = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$I = \iint_D 5x^2 y dx dy = 5\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy$$

$$= 5\int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right] dx = 5\int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \left(1 - x^2\right) dx$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}$$

四、证明/应用题(本题10 分. 解答过程、步骤和答案必须完整、正确)

20、解：令$f(x) = \ln x \quad x \in [a,b]$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$f(x) = \ln x$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导

由拉格朗日中值定理：$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}, \xi \in (a,b)$

$$\therefore \frac{1}{\xi} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}, \frac{b-a}{\xi} = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$$

又因为$0 \le a \le \xi \le b$

所以$\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$

21、解：设圆柱形罐头桶底面半径为 R，高为 H

圆柱体体积 $V=\pi R^2 H$

要使材料最省，即圆柱体表面积最小，

$$S=2\pi R^2+\frac{2V}{R}$$

$$S'=4\pi r-\frac{2V}{R^2}=\frac{2\left(2\pi R^3-V\right)}{R^2}$$

令 $S'=0$，得 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$$S''=4\pi+\frac{4V}{R^3}>0$$

$\therefore S$ 在点 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 处为极小值，也就是最小值，

此时相应的高为 $H=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2R$

即高与地面直径相等时，用料最省

河北省2013年专科接本科教育考试数学（二）（财经管理类试题参考答案

一、单项选择

1.D 2. B 3.A 4. D 5. B 6. C 7.D 8. C 9. A 10. B

二、填空题

11、$\frac{1}{2}$ 12、10 13、$dz=e^{x^2y}\left(2xydx+x^2dy\right)$ 14、$y=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$ 15、1

三、计算题

16、解：$\rho=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{3^n}=3$

$$R=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{3}$$

当 $x=\frac{1}{3}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ ，即调和级数，发散

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ ，为交错级数

$a_n=\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+2}=a_{n+1}$ 又 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ，由莱布尼兹判别法，知收敛

故原级数收敛域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

17、解：在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上两曲线交点为 $x=\frac{\pi}{4}$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\sin x-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

18、解：(1)方程组（Ⅰ）的系数矩阵Ⅱ

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\end{cases}$

令自由未知元 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

（2）联立两方程组得 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\\x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\\x_3=2x_4\end{cases}$

令自由未知元 $x_4=1$，得基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$

则原方程组通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\xi=k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$

19、解：由题意得 $x+2y=100$，即 $x=100-2y$

又 $z=x^2+8xy+7y^2=(100-2y)^2+8y(100-2y)+7y^2=10000+400y-5y^2$

将 z 看做 y 的一元函数，求导

$\dfrac{dz}{dy}=-10y+400$ 令 $\dfrac{dz}{dy}=0$ 得驻点 $y=40$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-10<0$ 为极大值点，而 $y=40$ 时，$x=20$

即当购置 A 原料 20 吨、B 原料 40 吨时产量最大

方法二：使用拉格朗日乘数法，构建拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=x^2+8xy+7y^2+\lambda(x+2y-100)$

令$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+8y+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=8x+14y+2\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x-2y-100=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=20\\ y=40\\ \lambda=-360\end{cases}$

由于是实际问题，极值点唯一，故当$x=20, y=40$

即当购置A原料20吨、B原料40吨时产量最大

四、应用题

20、解：需求函数$P=50-\dfrac{1}{4}Q$

总收入函数$R=PQ=\left(50-\dfrac{1}{4}Q\right)Q=-\dfrac{1}{4}Q^2+50Q$

边际收入函数$R'=-\dfrac{1}{2}Q+50$

$Q=50$时，$R'(50)=25$，经济学含义：当销售了50个单位产品时，再多销售一个单位的产品，总收入增加25个单位

$Q=100$时，$R'(100)=0$，经济学含义：当销售了100个单位产品时，再多销售一个单位的产品，总收入增加0个单位，即不增加。

河北省2013年专科接本科教育考试数学（三）（农学类）试题参考答案

一、单项选择

1.C 2. A 3. D 4. B 5. D 6. A 7.C 8. C 9. B 10. B

二、填空题

11、$1<x<2$ 12、$x+y-1=0$ 13、$\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$ 14、$[1,3)$ 15、2

三、计算题

16、解：原式$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+\sin 2x)}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin 2x}{x}\right)=-3$

17、解：$\int_0^1 x\left(e^{-x}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}d\left(1+x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)+\frac{1}{2}\ln 2=1-\frac{2}{e}+\frac{1}{2}\ln 2$$

18、解：设 $z=f(u,v)$，$u=xy$，$v=x^2+y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_u'\cdot y+f_v'\cdot 2x=yf_u'+2xf_v'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_u'\cdot x+f_v'\cdot 2y=xf_u'+2yf_v'$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(yf_u'+2xf_v'\right)dx+\left(xf_u'+2yf_v'\right)dy$$

19、解：$(A|B)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&-(\lambda-1)(\lambda+2)&(1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{pmatrix}$$

当 $-(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0$ 时，即 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时，方程组有唯一解

当 $\begin{cases}-(\lambda-1)(\lambda+2)=0\\(1-\lambda)(1+\lambda)^2\neq 0\end{cases}$ 时，即 $\lambda=-2$ 时，方程组无解

当 $\begin{cases}-(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0\\(1-\lambda)(1+\lambda)^2=0\end{cases}$ 时，即当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多组解

四、应用题

20、解：$S=S_1+S_2=\int_0^k x^2dx+\int_k^1\left(x^2-k^2\right)dx$

$$=\frac{k^3}{3}+\frac{1}{3}x^3\Big|_k^1-k^2x\Big|_k^1=\frac{k^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{k^3}{3}-k^2+k^3=k^3-k^2+\frac{1}{3}$$

$S^{'}=3k^2-2k$　令 $S^{'}=0$ 得 $k=\dfrac{2}{3}$ 或 $k=0$（舍去）

$S^{''}=6k-2$，$S^{''}\left(\dfrac{2}{3}\right)=2>0$

故当 $k=\dfrac{2}{3}$ 时，$S=S_1+S_2$ 取得最小值

河北省 2014 年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）试题参考答案

一、单项选择题

1. D【评注】根据对数的定义域及 $\ln x\neq 0$，得 $x\neq 1$ 且 $x>0$；同时 $9-x^2\geq 0$ 得 $-3\leq x\leq 3$，所以该题的定义域为 $(0,1)\cup(1,3]$，所以选 D.

2. B【评注】由连续可知分段函数在 $x=0$ 处极限存在，即：$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a+bx^2\right)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+bx)^{\frac{1}{x}}=\ln e^b=b$，得 $a=b$，所以选 B.

3. C【评注】本题考查的是积分上限的函数与洛必达法则的结合，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\ln(t+1)dt}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，所以选 C.

4. D【评注】直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{5}$ 的方向向量是 $\vec{s}=(3,1,5)$，平面 $II:x+7y-2z=0$ 的法向量是 $\vec{n}=(1,7,-2)$，可知 $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$，所以直线与平面的位置关系是平行，选择 D.

5. A【评注】$\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 xdf(x)=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=xe^{-x}\big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx=\dfrac{2}{e}-1$，所以选 A.

6. B【评注】$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\3&2&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&-1&a+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&0&a+4\end{pmatrix}$，当 a=-4 时，$r(A)=2$.

7. A【评注】$A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$，根据 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，可知 $A^{-1}=-\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d&b\\c&-a\end{pmatrix}$，所以选 A.

8. D【评注】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$，由 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$，可知该级数发散，所以选 D.

9. C【评注】本题考查的是可分离变量的微分方程的通解，对微分方程分离变量，然后两边同时积分，可知 $y'-xy^2=x$ 的通解为，$\arctan y-\frac{x^2}{2}=C$ 所以选 C.

10. B【评注】由隐函数的求导公式，$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y^2}{2xy-\cos y}=\frac{y^2}{\cos y-2xy}$，选 B.

二、填空题

11. 0【评注】定积分上下限关于 0 对称，且被积函数为奇函数，可知结果为 0.

12. $[0,2]$【评注】$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛；当 $x=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以收敛域为 $[0,2]$.

13. $\frac{1}{6}$【评注】选择有向折线作为积分路径，可得结果.

14. $\frac{112}{27}\pi$【评注】$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{4+\frac{4}{9}y^2}\right)^2dy=\frac{112}{27}\pi$.

15. $e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$【评注】特征方程为：$r^2-2r+5=0$，得 $r=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$，所以方程的通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

三、计算题

16. 解：令 $x=3\sin t, dx=3\cos tdt$

$$=\int\frac{9\sin^2 t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}3\cos tdt=9\int\sin^2 tdt=\frac{9}{2}\int(1-\cos 2t)dt$$
$$=\frac{9}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{9}{2}(t-\sin t\cos t)+C$$
$$=\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}-\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C$$

17. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\cos xf_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left(2yf_{11}''+\sin xf_{12}''\right)+y\cos xf_2'+y\cos\left(2yf_{21}''+\sin xf_{22}''\right)$$

$$=4xyf_{11}''+2x\sin xf_{12}''+\cos xf_2'+2y^2\cos xf_{21}''+y\cos x\sin xf_{22}''$$

$$=4xyf_{11}''+2\left(x\sin x+y^2\cos x\right)f_{12}''+\cos xf_2'+y\cos x\sin xf_{22}''$$

18. 解：$I=\iint\limits_D xyd\sigma$　其中 $D:y=x+1,y=0,y=\sqrt{1-x^2}$

$$I=\int_0^1 dy\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}}xydx=\int_0^1\left(y\frac{x^2}{2}\bigg|_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{1-y^2}{2}y-\frac{1-y^2}{2}y\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(y^2-y^3\right)dy=\frac{1}{12}$$

19. 解：（1）对增广矩阵 $(A|b)$ 进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\1&-1&-1&1&\lambda\\1&-4&5&1&-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\0&1&-2&0&\lambda-1\\0&-2&4&0&-\lambda-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\0&1&-2&0&\lambda-1\\0&0&0&0&\lambda-3\end{array}\right)$$

当 $\lambda\neq3$ 时，$r(A=2)\neq r(A|b)=3$，方程组无解；

当 $\lambda=3$ 时，$r(A)=r(A|b)=2<n$，方程组有无穷多解

（2）$(A|b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\0&1&-2&0&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-3&1&5\\0&1&-2&0&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

$\begin{cases}x_1-3x_3+x_4=5\\x_2-2x_3=2\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=5+3x_3-x_4\\x_2=2+2x_3\end{cases}$，$x_3$与$x_4$ 是自由未知量，取 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，

得特解 $\eta=\begin{pmatrix}5&2&0&0\end{pmatrix}^T$，

导出组为 $\begin{cases}x_1-3x_3+x_4=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=3x_3-x_4\\x_2=2x_3\end{cases}$，$x_3$与$x_4$ 是自由未知量，取 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3&2&1&0\end{pmatrix}^T$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\end{pmatrix}^T$，

方程组的全部解为：$X=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}^T+c_1\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^T+c_2\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$.（其中$c_1$与$c_2$为任意常数）

四、证明（或应用）题

20. 证明：$xf'(x)\ln x+f(x)=0$，$x\dfrac{dy}{dx}\ln y=-y$

$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{-1}{x\ln x}dx$，$\ln|y|=-\ln|\ln x|+\ln C$，$y=\dfrac{C}{\ln x}$

$C=f(x)\ln x$,令$C=F(x)$,即$F(x)=f(x)\ln x$

$F(x)$在$[1,3]$上连续，在$(1,3)$内可导，

$F(1)=f(1)\ln 1=0$，$F(3)=f(3)\ln 3=0$，

根据罗尔定理，至少存在一点ξ，使得$F'(\xi)=0$，其中$\xi\in(1,3)$即

$F'(\xi)=f'(\xi)\ln\xi+\dfrac{f(\xi)}{\xi}=0$，证出：$\xi f'(\xi)\ln\xi+f(\xi)=0$.

21. 解：设长方体水池的长为x m、y m、z m，则$xy+2yz+2xz=192$构造条件极值函数：

$V(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+2yz+2xz-192)$

$V_x'(x,y,z,\lambda)=yz+\lambda(y+2z)=0$，$V_y'(x,y,z,\lambda)=xz+\lambda(x+2z)=0$

$V_z'(x,y,z,\lambda)=xy+\lambda(2y+2x)=0$，$V_\lambda'(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+2xz-192=0$

解方程得$\lambda=-2$，$x=8$，$y=8$，$z=4$

当水池的长为 8m，宽为 8m，高为 4m 时，水池容积最大.

河北省 2014 年专科接本科教育考试数学（二）（财经管理类）试题答案

一、单项选择题

1. C【评注】本题考查求函数定义域，$\begin{cases}x^2-x-2\ge 0\\ 1-x>0\end{cases}$，解得$x\le -1$.

2. A【评注】本题考查求函数重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 4}=e^4$.

3. B【评注】本题考查函数的间断点. 当 $x=3$ 及 $x=-1$ 时函数没有定义，故 $x=3$ 及 $x=-1$ 是间断点，

又 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{3}{2}$， $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\infty$，所以选 B.

4. D【评注】本题考查由导数的几何意义求解未知数的值，两曲线在点 $(e,1)$ 处相切，同一点切线斜率相

等，所以由 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=2ax\\ ax^2+b=1\end{cases}$ 可以得出 $\begin{cases}\dfrac{1}{e}=2ae\\ ae^2+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2e^2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

5. B【评注】本题考查由方程所确定的隐函数的导数. 方程两边同时对 x 求导可得

$$y+x\cdot\frac{dy}{dx}-\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0,\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\cos y}-x.$$

6. A【评注】本题考查函数的单调增区间，函数定义域为 $(0,+\infty)$，导数

$y'=\dfrac{1}{x}-1\geq 0\Rightarrow x\leq 1$，所以单调增区间为 $(0,1]$.

7. C【评注】本题考查用换元法求不定积分，

$\int f(x)dx=\int xe^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$，所以选 C.

8. B【评注】本题考查多元函数求偏导数，等号左右两边对 x 求偏导数得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-e^{xy}y$.

9. D【评注】本题考查幂函数的收敛域，$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n+1}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2(n+1)+1}{2n+1}\right|=1$，收敛半径 $R=1$. 当 $x=1$

时，幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n+1}$ 发散，当 $x=-1$ 时，幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n+1}$ 收敛，所以收敛域为 $[-1,1)$.

10. D 【评注】本题考查三阶矩阵的秩，因为

$$\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&5&-5\\1&-3&4\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-3&4\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&4\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 所以 $r(A)=2$.

二、填空题

11. $\dfrac{1}{2}$【评注】本题考查函数的极限及等价无穷小替换，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{x}=\dfrac{1}{2}$.

12. $e^{-1}-e^{-2}$ 【评注】本题考查换元法求积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(x^{-1}\right)}{x^{2}}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f\left(x^{-1}\right)d\left(-x^{-1}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f\left(e^{-x^{-1}}\right)d\left(-x^{-1}\right)=e^{-x^{-1}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=e^{-1}-e^{-2}.$$

13. $xy=C$ 【评注】本题考查运用分离变量求微分方程，

$$x\frac{dy}{dx}+y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=-\ln x+C_1\Rightarrow xy=C.$$

14. $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ 【评注】本题考查矩阵的乘积， $AA^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$.

15. $\frac{3}{\ln 2}-1$ 【评注】本题考查定积分的几何应用

$$\int_0^2\left(2^x-\frac{2-x}{2}\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2-x\Big|_0^2+\frac{x^2}{4}\Big|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-1.$$

三、计算题

16. 解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x(t+1)dt\right)^2}{\int_0^x\left(t^3+t^2\right)dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x(t+1)dt\cdot(x+1)}{x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x(t+1)dt}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{2x}=1.$$

17. 解：因为$|A|=2\neq 0$，故 A 的矩阵存在

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)=\left(I|A^{-1}\right)$$

因此 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

18. 解：由题意可知平均成本为 $\overline{C}(x)=x+20+\dfrac{900}{x}$

故 $\overline{C}'(x)=1-\dfrac{900}{x^2}$，令 $\overline{C}'(x)=0$，得 $x_1=30,x_2=-30$（舍去）

又 $\overline{C}''(x)=\dfrac{1800}{x^3}$，且 $\overline{C}''(30)>0$，所以 $x=30$ 为 $\overline{C}(x)$ 的极小值点，也是最小值点，即月产量为 30 吨时的平均成本最低.

19. 解：

$$\begin{aligned}&\int\sin^2x\cos^3xdx=\int\sin^2x\cos^2xd(\sin x)\\&=\int\sin^2x(1-\sin^2x)d(\sin x)\\&=\int(\sin^2x-\sin^4x)d(\sin x)\\&=\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+C\end{aligned}$$

四、应用题

20. 解：由题意可知出售 x 件产品 A 与 y 件产品 B 所获得的收入函数为

$R(x,y)=10x+9y$，故利润函数为

$L(x,y)=R(x,y)-C(x,y)=-0.03x^2-0.01xy-0.03y^2+8x+6y-400$

由 $\begin{cases}L_x'=-0.06x-0.01y+8=0\\L_y'=-0.01x-0.06y+6=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=120\\y=80\end{cases}$

即 $L(x,y)$ 有唯一驻点，因此 $L(x,y)$ 在点 $(120,80)$ 取得最大值，所以当生产 120 件产品 A 和 80 件产品 B 时获得利润最大.

河北省 2015 年专科接本科教育考试数学（一）（理工类）试题参考答案

一. 单项选择题

1.C　2.B　3.D　4.A　5.D　6.C　7.B　8.A　9.C　10.B

二. 填空题

11. $x_0(1+r)^{10}$　12. $\dfrac{1}{2}$　13. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$　14. 3　15. 4

三. 计算题

16. 解：$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+x}dx$

其中 $\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{0}\left(1-\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)dx=1-\ln(1+e^x)\Big|_{-1}^{0}=\ln(1+e)-\ln 2$

$\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+x}dx=\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+x}d(x+1)=\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}=\ln 2$

所以 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\ln(1+e)$.

17. 解：令 $F(x,y,z)=yz+zx+xy-1$　$F_x=z+y, F_y=z+x, F_z=x+y$， $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{z+y}{x+y}$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(-\frac{z+y}{x+y}\right)_x'=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(x+y)-(z-y)}{(x+y)^2}=\frac{2(z+y)}{(x+y)^2}$$

18. 解：$\int_0^1 dx\int_x^1\dfrac{\cos y}{y}dy=\int_0^1 dy\int_0^y\dfrac{\cos y}{y}dy=\int_0^1\dfrac{\cos y}{y}x\Big|_0^y dy$

$$=\int_0^1\cos y dy=\sin y\Big|_0^1=\sin 1$$

19. 解：$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\1&-1&1&1\\1&-1&-2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&0&2&1\\0&0&-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&a+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

当 $a\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，$r(A)=2\neq r(A|b)=3$，方程组无解

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$r(A)=2\neq r(A|b)=2<3$，方程组有无穷多解.

此时方程组的增广矩阵可变为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$

此时方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$（其中 c 为任意实数）.

四、证明（或应用）题

20. 证明：令 $F(x) = f(x)\cos x, F'(x) = F'(x)\cos x - f(x)\sin x$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

又因为 $f(0) = f(1) = 0$，所以 $F(0) = F(1) = 0$

由罗尔定理，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi) = 0$，

$f'(\xi)\cos\xi - f(\xi)\sin\xi = 0$，即 $f'(\xi)\cos\xi = f(\xi)\sin\xi$.

21. 解：由于池侧单位造价为 a,所以池底单位造价为 2a，因此总造价 y：

$y = 2\pi rh \cdot a + \pi r^2 \cdot 2a$，又有水池的体积为$16\pi$，即 $\pi r^2 h = 16\pi$，故有 $h = \frac{16}{r^2}$，

因此 $y = 2\pi r \frac{16}{r^2} \cdot a + \pi r^2 \cdot 2a = 2a\pi\left(\frac{16}{r} + r^2\right)$

由实际问题知 $r > 0$，故以下求 y 在 $(0,\infty)$ 内的最小值.

$y' = 2a\pi\left(2r - \frac{16}{r^2}\right) = 4a\pi\left(r - \frac{8}{r^2}\right)$，令 $y' = 0$，得唯一驻点 $r = 2$.

故当 $r = 2$ m ，$h = 4$ m 时，总造价最低，最低造价为 $24\pi a$ 元.

河北省 2015 年专科接本科教育考试数学（二）（财经管理类）试题答案

一、单项选择题

1.B　2.A　3.B　4.C　5.C　6.A　7.D　8.C　9.D　10.B

二、填空题

11. $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27}\right)$　12. $y=-\dfrac{3}{5}x+3\sqrt{2}$　13. $dz=ye^{xy^2}\left(ydx+2xdy\right)$　14. 2　15. 2

三、计算题

16. 解：$\int_1^e \dfrac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^e \dfrac{d(\ln x)}{1+\ln x}=\ln(1+\ln x)\Big|_1^e=\ln 2$

17. 解：

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx+\int_1^2\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\ln x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-\ln x\right)\Bigg|_1^2$$

$$=\ln 2-\frac{7}{24}+\frac{7}{3}-\ln 2=\frac{49}{24}$$

18. 解：微分方程可化为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xe^x}{\tan y}$，即 $xe^xdx=\tan ydy$，两端积分可得$(x-1)e^x+c_1=-\ln|\cos y|$，将 $y|_{x=0}=0$ 代入，得$-1+C_1=0$，即 $C_1=1$. 故所求特解为$\ln|\cos y|=e^x-xe^x-1$.

19. 解：$|A|=2$，故 A 可逆，由 $AX=B=2I$, 可得 $X=2A^{-1}$，利用初等变换求 A^{-1}.

$$(A|I)=\begin{pmatrix}2&3&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\2&3&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&5&3&1&-2&0\\0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&5&3&1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-2&1&-7&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$ 故

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\left(I|A^{-1}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}\qquad X=2A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 7 & 5\end{pmatrix}$$

四、应用题

20. 解：（1）由题意可知，产量为Q时的成本$C=2Q+1$，收入

$R=PQ=\left(6-\frac{Q}{2}\right)Q=6Q-\frac{Q^2}{2}$, 故利润函数为

$L=R-C=6Q-\frac{Q^2}{2}-2Q-1=-\frac{Q^2}{2}+4Q-1$；

(2) $L'=-Q+4$，令$L'=0$，得$Q=4$. 根据实际问题知，L存在最大值，且$Q=4$是利润函数的唯一驻点，故当产量为4百件时，利润最大，最大利润为7万元.

（3）$P=3$时，$Q=6$，需求弹性函数为$\eta(p)=-\frac{PdQ}{QdP}=\frac{2P}{12-2P}$, 故$\eta(3)=1$，其经济含义：当$P=3$时，价格下降百分之一，引起需求量上升百分之一.

河北省2016年专科接本科教育选拔考试数学（一）（理工类）试题答案

一、单项选择题

1.C　解析：考查函数定义域. 解不等式组$\begin{cases}x-1>0\\16-x^2>0\end{cases}$即得.

2.C　解析：考查导数的定义. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+h)}{h}=-3f'(x_0)=-3$.

3.B　解析：考查上限无穷的广义积分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\arctan0=\frac{\pi}{4}.$$

4.A　解析：考查曲线的渐近线. 由$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=1$得水平渐近线为$y=1$；由$\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$得垂直渐近线为$x=1$.

5.D

解析：考查矩阵方程$\left(A,B\right)=\begin{pmatrix}2&5&2&-1&4\\3&3&1&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&0&-1&0\end{pmatrix}=\left(I,X\right)$

6.D 解析：考查不定积分及原函数的概念

$$\int f'(x)dx=f(x)+C=\left(x^2\ln x\right)'+C=x(2\ln x+1)+C$$

7.A 解析：考查平面方程.将点$P_0(1,2,1)$代入$3x-y-z=0$成立，代入B、C、D不成立.

8.A 解析：考查莱布尼茨定理及绝对收敛、条件收敛概念.

9.B 解析：考查矩阵的秩. $A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\\0&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故秩为2.

10.D 解析：考查极坐标系下计算二重积分.

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^{2a}r^2dr=\frac{14}{3}\pi a^3$$

二、填空题

11. $-\frac{1}{2}$ 解析：考查某点连续的概念，由函数$f(x)$在$x=0$处连续得：

$$f(0)=1+k=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}$$

12. $5\pi a^2$ 解析：考查格林公式$\oint_L 2xdy-3ydx=\iint_D 5dxdy=5S_D=5\pi a^2$

13. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 解析：考查幂级数的收敛域，收敛半径$R=\frac{1}{2}$,当$x=\pm\frac{1}{2}$时级数都收敛，故收敛域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

14. $-\frac{e}{2}$ 解析：考查等价无穷小替换及洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{t^2}dt}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin xe^{\cos^2 x}}{2x}=-\frac{e}{2}$$

15. $\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$ 解析：考查直接坐标系下交换积分次序

$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

三、计算题

16. 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{2-z}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2-z+xz'_x}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

17. 解：令 $\int_1^3 f(x)dx=A$，则 $f(x)=\ln x+A$，故有 $\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3(\ln x+A)dx$，即

$A=3\ln 3-2+2A$，得 $A=2-3\ln 3$，因此 $f(x)=\ln x+2-3\ln 3$.

18. 解：微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的两个特征根为 $r_1=2,r_2=3$，故其通解

$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的特解形式可以设为 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$，将其代入微分方程得

$a=-\frac{1}{2},b=-1$，故通解为 $y=\left(C_1-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}+C_2e^{3x}$.

19. 解：增广矩阵 $B=(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&1&2&2&6&3\\0&1&2&2&6&5-b\end{pmatrix}$,

当 $a=0,b=2$ 时，方程有解，此时 $B\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，令 $x_3=k_1$，

$x_4=k_2,x_5=k_3$，则通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）

四、应用题

20. 解：设正方形的周长为 x，则圆的周长为 $a-x$，则正方形的边长为 $\frac{x}{4}$，圆的半径为 $\frac{a-x}{2\pi}$，正方形

与圆形的面积之和$S=\frac{x^2}{16}+\frac{(a-x)^2}{4\pi},(0<x<a)$

令$S'=\frac{x}{8}-\frac{a-x}{2\pi}=0,则x=\frac{4a}{4+\pi},而S''\left(\frac{4a}{4+\pi}\right)>0,故x=\frac{4a}{4+\pi}$时 S 取极小值，

又是唯一驻点，故也取最小值，即当正方形周长为$x=\frac{4a}{4+\pi}$，圆的周长为$x=\frac{\pi a}{4+\pi}$时，正方形与圆形的面积之和最小.

河北省 2016 年专科接本科教育选拔考试数学（二）（财经管理类）答案

一、单项选择题

1.B 解析：考查函数的定义域.解方程组$\begin{cases}x+2>0\\x^2-16<0\end{cases}$即得.

2.D 解析：考查导数的定义式.$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h}=5f'(x_0)$.

3.A 解析：考查方阵行列式的性质.$|2A|=2^3|A|=16$

4.D 解析：考查函数的高阶导数. $f^{(7)}(x)=x\cdot8!$，故$f^{(7)}(2)=2\cdot8!$.

5.C 解析：考查一节线性微分方程的通解

$$2xydx+x^2dy=0\Rightarrow y'+\frac{2}{x}y=0\Rightarrow y=Ce^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{C}{x^2}$$

6.A 解析：考查函数曲线的凹凸性.令$y''=6x^2-30x+36<0$即得.

7.A 解析：考查无穷区间上的广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{2}{9+x^2}dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3}\arctan\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\arctan0=\frac{\pi}{3}$

8.C 解析：考查不定积分的分部积分法

$$\int xf'(x)dx=xf(x)-\int f(x)dx=x\cos x-\sin x+C$$

9.A 解析：考查定积分的还原积分法及分部积分法

$$\int_0^4e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^2e^t tdt=2e^t t\Big|_0^2-2e^t\Big|_0^2=2e^2+2$$

10.D 解析：考查常数项级数的敛散性

二、填空题

11. $dz = 2xe^y dx + x^2 e^y dy$ 解析：考查多元函数的全微分.

12. $\frac{1}{3}$ 解析：考查洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^t - 1)\sin t dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x - 1)\sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

13. 3 解析：考查向量组的秩.

14. $a = 3, b = 3 - \sqrt{6}$ 解析：考查函数的连续性，令 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f[0]$，即得.

15. $[-3,7)$ 解析：考查幂级数的收敛域.

三、计算题

16. 解：设 $F(x,y,z) = xyz - \sin xyz$. 则 $F_x = yz - yz\cos xyz$， $F_y = xz - xz\cos xyz$，

$F_z = xy - xy\cos xyz \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{yz - yz\cos xyz}{xy - xy\cos xyz} = -\frac{z}{x}$；同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}$.

17. 解：原方程化简为 $y' = (2+x)(1+y^2)$，分离变量得 $\frac{1}{1+y^2}dy = (2+x)dx$，两端积分

$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int (2+x)dx$，方程的通解为 $\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$，由初始条件 $y(0) = 1$，得 $\frac{\pi}{4}$，方程的特解为 $\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{\pi}{4}$，或 $y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{\pi}{4}\right)$

18. 解：

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 5 & 5 & -3 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通解方程为 $\begin{cases} x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_5 + \frac{1}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - x_5 - \frac{1}{2} \end{cases}$，其中 x_2, x_4, x_5 为自由元，令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得原方程组的一个特解

$\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$ 分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，得对应其次方程组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

故方程组的通解为 $X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）

19. 解：设切点 $P_0\left(x_0,{x_0}^2\right)$，即 $y'=2x,k=y'\big|_{x=x_0}=2x_0$，

得切线方程为 $y-{x_0}^2=2x_0(x-x_0)$，即 $y=2x_0x-{x_0}^2$.

所围图形面积为

$$S=\int_3^6\left(x^2-2x_0x+{x_0}^2\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x_0x^2+{x_0}^2x\right)\Bigg|_3^6=3{x_0}^2-27x_0+63.$$

定义域为 $x_0\in[3,6]$，求导，得：$S'=6x_0-27$，令 $S'=0$，得唯一驻点 $x_1=\frac{9}{2}$，

经与区间端点比较，面积函数 S 在 $x_1=\frac{9}{2}$ 处取得最小值.

故 P_0 点坐标为 $\left(\frac{9}{2},\frac{81}{4}\right)$ 时所求面积最小，最小面积是 $\frac{9}{4}$.

20. 解：由已知，利润函数 $L=(Q_1+Q_2)x-C=Q_1x+Q_2x-2Q_1-2Q_2-5$

$$=\frac{18-x}{2}(x-2)+(12-x)(x-2)-5$$
$$=-\frac{3}{2}x^2+24x-47$$

求导得：$L'=-3x+24$，令 $L'=0$，得驻点 $x=8$.

根据实际情况，L 存在最大值，且驻点唯一，则驻点即为最大值点.

$$L_M=-\frac{3}{2}\cdot 8^2+24\cdot 8-47=49.$$

故当两个市场价格为 8 万元/吨时，企业获得最大利润，此时最大利润为 49 万元.

河北省 2017 年普通高校专接本教育选拔考试数学（一）试卷答案

一、选择题

1.D 2.A 3.D 4.C 5.A 6.C 7.B 8.D 9.A 10.B

二、填空题

11. $\dfrac{e^y}{1-xe^y}dx$ 12. $e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$ 13. $[0,4)$ 14. $2f\left(x^2\right)+4x^2f'\left(x^2\right)$

15. $\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

三、计算题

16. 解：令 $t=x-1$，则 $x=t+1$ $\therefore\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt$

又 $f(x)=\begin{cases}xe^x, x\geq 0\\ x^2, x<0\end{cases}$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0 t^2dt+\int_0^1 te^tdt=\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^0+\int_0^1 te^tdt=\frac{1}{3}+te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^tdt$$

$$=\frac{1}{3}+e-e^t\Big|_0^1=\frac{4}{3}$$

17. 解：令 $u=xy,v=x+y$，则 $z=f(u,v)$，由链式法则得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u'\cdot y+f_v'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f_{uu}''\cdot x+f_{uv}''\right)y+f_u'+f_{vu}''\cdot x+f_{vv}''$$

$$=xf_{uu}''+f_u''+(x+y)f_{uv}''+f_{vv}''$$

18. 解：由 $P=-x^2y+2x+4,Q=y^2x+5y-6$ 及格林公式可得

$$\oint_L\left(-x^2y+2x+4\right)dx+\left(y^2x+5y-6\right)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

19. 解：

$$\left(A|b\right)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&a\\1&0&2&3&3\\4&5&3&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&a\\0&1&-1&-2&a-3\\0&0&0&0&5(1-a)\end{bmatrix}$$

当$1-a$等于0时，即$a=1$时，$r(A)=r(A|b)$，方程组有解。

此时，$\left(A|b\right)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，原方程对应的齐次方程的通解方程为

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2-x_3-2x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3-x_4\\x_2=x_3+2x_4\end{cases}$ 取自由未知量为x_3,x_4，令

$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$得基础解系$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}$，令$x_3,x_4=0$得原方程一个特解为$\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$

所以原方程的通解为$k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$

四、应用题

20. 解：假设水平射出的距离为s，在空中的时间为t。则$s=vt=t\sqrt{2gx}$，其中由题意得，$h-x=1/2gt^2$，得$t=\sqrt{2(h-x)/g}$。则$s=\sqrt{2(h-x)/g}\sqrt{2gx}=2\sqrt{(h-x)x}$，

令$s'(x)=\dfrac{h-2x}{\sqrt{(h-x)x}}=0$，得$x=h/2$。$s''(x)=\dfrac{-2\sqrt{(h-x)x}-1/2(h-2x)\dfrac{h-2x}{\sqrt{(h-x)x}}}{(h-x)x}$

$s''(h/2)<0$。所以当$x=h/2$时，水射出的距离最远。

河北省 2017 年普通高校专接本教育选拔考试数学（二）试卷参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.B　4.A　5.B　6.B　7.D　8.D　9.C　10.A

二、填空题

11. 0　12. $\frac{3}{5}\arctan x+\frac{1}{2}x^2+C$　13. $\begin{pmatrix}2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$

14. $\frac{5}{6}$　15. 29

三、计算题

16.解：设 $F(x,y,z)=\frac{3x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{3x}{z}-\ln z+\ln y$

$F_x'=\frac{3}{z}$，$F_y'=\frac{1}{y},F_z'=\frac{3x}{z^2}-\frac{1}{z}$ 则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{\frac{3}{z}}{\frac{3x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\frac{3z}{z-3x}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{\frac{1}{y}}{\frac{3x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{zy-3xy}$$

17.解：增广矩阵 $B=\begin{bmatrix}2 & -4 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & -6 & 3 & -3 & 4\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

齐次同解方程为 $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_3-3x_4=0\end{cases}$，取 x_2,x_4 为自由未知量得基础解系为：

$\xi_1=(2,1,0,0)$，$\xi_2=(0,0,1,1)$

非齐次同解方程为 $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\ 3x_3-3x_4=5\end{cases}$，取 x_2,x_4 为自由未知量得非齐特解为：

$\eta=\left(-\frac{1}{3},0,\frac{5}{3},0\right)$，所以通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta(k_1,k_2\in R)$

18.解：由题可知 $a_n=\frac{1}{3n},\therefore\ \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3(n+1)}}{\frac{1}{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{3n+3}=1$，即：

$R=\frac{1}{\rho}=1$，收敛区间为$(-1,1)$

当$x=-1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n}$条件收敛，当$x=1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$发散

所以，收敛域为$[-1,1)$

19. 解：

$$\int\frac{6x^2\arctan x}{1+x^2}dx=6\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx=6\int\frac{x^2\arctan x+\arctan x-\arctan x}{1+x^2}dx$$
$$=6\int\left(\arctan x-\frac{\arctan x}{1+x^2}\right)dx=6\left(x\arctan x-\int xd\arctan x-\int\arctan xd\arctan x\right)$$

$$\int ad\arctan x=\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C_1$$

$$\int\arctan xd\arctan x=\frac{1}{2}\arctan^2 x+C_2$$

$$\therefore\int\frac{6x^2\arctan x}{1+x^2}dx=6x\arctan x-3\ln\left(1+x^2\right)-3\arctan^2 x+C$$

四、应用题

20. 解：设分x批生产，则每批生产$\frac{50}{x}$万件，生产准备费为y_1元，库存费为y_2元，费用和为y元，

则：$y_1=1000x, y_2=\frac{500000}{x}\times 0.1\times\frac{1}{2}$，$y=1000x+\frac{25000}{x}$

对y求导得，$y'=1000-\frac{25000}{x^2}$

令$y'=0$，解得$x=5$

$x=5$为$y=1000x+\frac{25000}{x}$的最小值点，此时$y=10000$

所以分 5 批生产费用最小，费用之和为 10000 元。

河北省 2018 年普通高校专科接本科教育选拔考试《数学一》试卷答案

一、单项选择题

1-5 ADDCB 6-10 CACDA

二、填空题

11. 1

12. $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$

13. $(-1,1)$

14. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

15. $\frac{2}{3}\pi R^3$

三、计算题

16. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos xf_1^{'}+y^2f_2^{'}$

$$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=2xy\cos xf_{12}^{''}+2yf_2^{'}+2xy^3f_{22}^{''}$$

17. 解：令 $x=1-t$，$x=t+1$ ，$dx=dt$，则 $t:-1\to 1$，故

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(x)dt=\int_{-1}^1 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^0\frac{2x}{1+x^2}dx+\int_0^1 In(1+x)dx$$

$$=\int_{-1}^0\frac{2x}{1+x^2}d(1+x^2)+xIn(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1 xdIn(1+x)$$

$$=In(1+x^2)\Big|_{-1}^0+In2-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$$

$$=-In2+In2-\int_0^1 1-\frac{1}{1+x}dx$$

$$=-(x-In(1+x))\Big|_0^1$$

$$=In2-1$$

18. 解：$\frac{\partial P}{\partial y}=\sin y$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\sin y+2x$

原式=$\iint\limits_D(\sin y+2x-\sin y)dxdy$

$$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}2xdy$$

$$=\int_0^{\pi}2xy\Big|_0^{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}2x\sin xdx$$

$$=-\int_0^{\pi}2xd\cos x$$

$$=-\left(2x\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\cos xdx\right)$$

$$=-\left(-2\pi-2\sin x\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$=2\pi$$

19.

求方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=2\\2x_1+4x_2-x_3+3x_4=a\\3x_1+6x_2-2x_3+4x_4=5\end{cases}$

解：$B\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\2&4&-1&3&a\\3&6&-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\0&0&1&1&a-4\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1&2\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&a-3\end{pmatrix}$

当 a=3 时，$R(A)=R(B)=3<4$有无穷解，增广矩阵可化为

$\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，同解方程为$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4=1\\x_3+x_4=-1\end{cases}$，取$x_{2,}x_4$为自由未知量，分别令$x_2=0,x_4=1$和

$x_2=1,x_4=0$得基础解析为$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

令$x_2=x_4=0$，得非齐次特解$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$

非齐通解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}(k_1,k_2\in R)$

四、应用题

19.解：设长、宽各为x、y则 x+2y=24

面积：$s=xy$，将$y=12-\frac{1}{2}x$代入S得：

$S=x\left(12-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x^2+12x$

当 $x=-\frac{12}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=12, y=6$ 时面积最大，最大面积为 72，所以能够围成面积为 64 的区域。

河北省 2018 年普通高校专接本教育选拔考试数学（二）真题试卷答案

二、单项选择题

1-5 DCDAB　　　　6-10 CADCB

二、填空题

11. $\frac{1}{3}$

12. $y^2=C(x-1)^2+1$

13. $\begin{bmatrix}7 & -7\\ 2 & -16\end{bmatrix}$

14. $\frac{5}{2}-2In2$

15. $[-2,2)$

三、计算题

16. 解：

$f_x'=2x-y-2, f_y'=2y-x+1;$令$f_x'=0, f_y'=0,$得驻点$(1,0)$

$\mathrm{A}=f_{xx}''=2, B=f_{xy}''=-1, C=f_{yy}''=2,$则$B^2-AC=-3<0,$且$\mathrm{A}>0,$

$\therefore(1,0)$为极值点且是极小值点，极值$f(1,0)=1$

17. 解：

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ -2 & -5 & 1 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & 5\\ 0 & 1 & -3 & -1\end{pmatrix}, R(A)=2<4,$有无穷多解，

对应其次同解方程为$\begin{cases}x_1=-7x_3-5x_4\\ x_2=3x_3+x_4\end{cases}$

令未知自由元$\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-7\\ 3\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-5\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{pmatrix}-7\\3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-5\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

18. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+x^2f^{'}\bullet 2x=2xf+2x^3f^{'}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x2f+2xf^{'}\cdot 2x+6x^2f^{'}+2x^3f^{''}\cdot 2x=2f+10x^2f^{'}+4x^4f^{''}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf^{'}\cdot 2y+2x^3f^{''}\cdot 2y=4xyf^{'}+4x^3yf^{''}$$

19. 解：$P(x)=\tan x, q(x)=\sin 2x$

$$\therefore y=e^{-\int \tan xdx}\left(\int \sin 2x\cdot e^{\int \tan xdx}dx+c\right)=\cos x\left(-2\cos x+c\right)=-2\cos^2 x+c\cos x$$

四、应用题

20. 解：（1）$L=Px-c-tx=-0.2x^2+(4-t)x-1$

$L^{'}=0.4x+4-t$，令 $L^{'}=0$ 得 $x=10-\frac{5}{2}t$，$L^{''}=-0.4<0$，$\therefore x=10-\frac{5}{2}t$ 是极大值点，

$\therefore$ 当销售量为 $10-\frac{5}{2}$（千克）是，获得最大利润。

商家获得最大利润时，$x=10-\frac{5}{2}t$，设税收总额为T,

（2）$T=xt=\left(10-\frac{5}{2}t\right)\cdot t=-\frac{5}{2}t^2+10t$，$T^{'}=-5t+10$，令 $T^{'}=0$ 得 $t=2$，$T^{''}=-5<0$，

$\therefore t=2$ 为极大值点，所以当 $t=2$ 时，税收总额最大。

河北省 2019 年普通高校专接本教育选拔考试数学（一）试卷参考答案

一、选择题

1-5 BACBC 6-10 DABCA

二、填空题

11. 2 12.（1，-1） 13.（-3,5） 14. $y^{''}-6y^{'}+9y=0$ 15. $x-4y+6z-21=0$

三、解答题

16. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1^{'}e^y+f_2^{'}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^yf_1^{'}+e^y\left(f_{11}^{''}+f_{13}^{''}\right)+f_{21}^{''}xe^y+f_{23}^{''}$$

17. 解：$P(x,y)=x^2y,Q=-xy^2,\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=-y^2$,路径相关

$$\oint_L x^2ydx-xy^2dy=\iint_D\left(-y^2-x^2\right)d\delta=-\iint_D(x^2+y^2)d\delta$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_o^a\left[(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right]rdr=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr$$

18. 解：$\iint_D xe^ydxdy=\int_1^0dx\int_{2x}^{x^2+1}xe^ydy=\int_0^1\left(xe^y\Big|_{2x}^{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(xe^{x^2+1}-xe^{2x}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}e-\frac{1}{4}$$

19. 解：对（A$|b$）进行初等行变换

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3=\frac{1}{2}\\x_{4=0}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\x_4=0\end{cases}$，$x_2$与$x_3$为自由未知量，取$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得$\eta=\left(\frac{1}{2},0,0,0\right)^T$

导出组$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\x_4=0\end{cases}$，$x_2$与$x_3$为自由未知量，取$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

基础解系$v_1=\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)^T,v_2=\left(\frac{1}{2},0,1,0\right)^T$

全部解：$x=\eta+C_1v_1+c_2v_2(C_1\text{和}C_2\text{为任意常数})$

四、应用题

20. 解：设底面半径为x,高为h,则$h=\dfrac{300}{\pi x^2}$，则造价$f(x)=2\pi xh+2\pi xh=2\pi x^2+\dfrac{600}{x}$,

而 $f'(x)=4\pi x-\frac{600}{x^2}$，令$f'(x)=0$，则$f'(x)=0$，则$4\pi x-\frac{600}{x^2}$，所以$x=\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}},h=2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$

即：底半径$\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$米，高为底半径 2 倍。由于实际问题的存在，不需要进行验证

河北省 2019 年普通高校专接本教育选拔考试数学（二）试卷参考答案

一、选择题

1-5 BACCA　　　　6-10 DBCBC

二、填空题

11. $\frac{t}{2}$　　12. $\frac{1}{3}$　　13. $\begin{pmatrix}1&8\\2&21\\3&9\end{pmatrix}$　　14. $y=\sqrt{x}$　　15. $\frac{1}{(1-x)^2}(|x|<1)$

三、解答题

16.解：

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}|\cos x|dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos xdx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}-0+1=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

18. 解：增广矩阵 $B=(A|b)=\begin{pmatrix}1&2&-2&3&2\\2&4&-3&4&5\\5&10&-8&11&12\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2&3&2\\0&0&1&-2&1\\0&0&2&-4&2\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2&3&2\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&-1&4\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（1）对应的齐次线性方程组的同解方程组为$\begin{cases}x_1+2x_2-x_4=0\\x_3-2x_4=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4\\x_3-2x_4\end{cases}$

令自由未知量$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

令自由未知量$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则基础解系为$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

（2）非齐次线性方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

令自由未知量$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，则特解为$\eta = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

所以该方程组的的通解为 $X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

19. 解 ：$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_1' y) = (f_{11}''x + f_{12}'')y + f_1' = f_{11}''xy + f_{12}''y + f_1'$$

20. 解：

$$S = \int_{-8}^{-4} \sqrt{y+8} - \frac{-y-8}{2} dy = \int_{-8}^{-4} \sqrt{y+8} dy = \int_{-8}^{-4} \frac{y}{2}$$

$$= \int_{-8}^{-4} \sqrt{y+8} d(y+8) + \left(\frac{y^2}{4} + 4y\right)\Bigg|_{-8}^{-4}$$

$$= \frac{2}{3}(y+8)\Bigg|_{-8}^{-4} + \left(\frac{y^2}{4} + 4y\right)\Bigg|_{-8}^{-4}$$

$$= \frac{2}{3} \times 8 + (4 - 16 - 16 + 32)$$

$$= \frac{28}{3}$$

四、应用题

20. 解：由题意得$P = 1000 - 2x$，则收益函数为$R = Px = -2x^2 + 1000x$，成本函数为$C = 5000 + 20x$，

利润函数为$L = R - C = -2x^2 + 980x - 5000$，边际利润函数为$L' = -4x + 980$

当$x = 240$时，$L' = 20$.其经济学意义：当销售量为 240 时，每增加一个单位的销售量，利润增加

河北省 2020 年普通高校专接本教育选拔考试

数学（一）试卷参考答案

一、单项选择题

1-5 ABDCD 6-10 CACCB

二、填空题

11. $\frac{y}{x-y}dx$ 12. $(4,6]$ 13. $(c_1+c_2x)e^{2x}$ $(c_1,c_2\text{任意常数})$

14. $\frac{x-2}{8}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-6}{-1}$ 15. $\frac{34}{21}$

三、计算题

16.解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2\left(f_1'\frac{1}{y}+f_2'\right)=2xf+\frac{x^2}{y}f_1'+x^2f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3x^2}{y^2}f_1'+2xf_2'-\frac{x^3}{y^3}f_{11}''+\left(\frac{x^2}{y}-\frac{x^3}{y^2}\right)f_{12}''+x^2f_{22}''$$

17.解：

$$\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le a\end{cases}$$

$$\mathrm{I}=\iint_D\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma=\int_0^{2n}d\theta\int_0^a(a-r)rdr=\frac{\pi a^3}{3}$$

18.解：

$$\oint_4\left(x^2-xy^3\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D\left(-2y+3xy^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^2dy\int_0^1\left(-2y+3xy^2\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(-4y+6y^2\right)dy=0$$

19. 解：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-2&3&0\\1&-3&-5&2&-1\\1&1&1&4&1\\1&7&10&7&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&3&0\\0&-2&-3&-1&-1\\0&2&3&1&1\\0&8&12&4&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&3&0\\0&2&3&1&1\\0&0&0&0&a-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

当$a=4$时有解

当$a\equiv 4$时

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&3&0\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3-\frac{7}{2}x_4\\x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\\x_3=0+x_3+0x_4\\x_4=0+0x_3+x_4\end{cases}$$

$$\text{通解}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\left(C_1C_2\text{任意常数}\right)$$

四、应用题

20. 解：

设宽为x CM　　则长为$2x$ CM　　高为z CM　　表面积为 S cm^2

$576=x\cdot 2x\cdot z\qquad z=\frac{288}{x^2}$ cm

$\therefore S=2\left(2x\cdot x+2x\cdot\frac{288}{x^2}+x\cdot\frac{288}{x^2}\right)$

$=4x^2+\frac{1728}{x}$

$S^1=8x-\frac{1728}{x^2}=0\qquad\therefore x^3=216\qquad x=6(cm)$　　驻点只有一个，根据实际问题表面积的最小值一定存在，$\therefore$当长$=12cm$宽$=6cm$高为$8cm$时，表面积最小 。

河北省 2020 年普通高校专接本教育选拔考试

数学（二）试卷参考答案

一、单项选择题

1-5.CCCDB 6-10.CDABA

二、填空题

11. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 12. $\frac{1}{6}$ 13. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\frac{1}{2}l_n\left(2e^x+c\right)$ 15. $\frac{1}{2}$

三、计算题

16.解：

设 $\sqrt{x}=t \qquad dx=2tdt$

当 $x=0$时 $t=0$ 当 $x=4$时$t=2$

$\therefore$ 原积分 $=2\int_0^2\frac{t}{t+2}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt$

$=2\left(t-2l_n\left(t+2\right)\right)\Big|_0^2$

$=4-4l_n2$

17.解：

$$\left(\mathrm{A}:\mathrm{E}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathrm{AX}=\mathrm{B}$

$\therefore \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

18.解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{v}{u}e^{y}+l_{u}u\cdot 2x$$

$$=\frac{(x^{2}-2y)e^{y}}{xe^{y}}-2xl_{n}xe^{y}$$

$$=\frac{x^{2}-2y}{x}-2xl_{n}x-2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial 8}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{v}{u}xe^{y}+l_{n}u\cdot(-2)$$

$$=x^{2}-4y-2l_{n}x$$

19.解：

$$y=e^{-\int XXX}\left(\int Qcx\Big|e^{\int XXXXX}dx+c\right)$$

$$=e^{-\int 2xdx}\left(\int 4xe^{\int 2xdx}dx+c\right)$$

$$=e^{-x^{2}}\left(2e^{x^{2}}+c\right)$$

$$=2+ce^{-x^{2}}$$

代入 $y\big|_{x=0}=1$得$c=-1$

$\therefore$特解为$y=2-e^{-x^{2}}$

20.解：

（1）$c(30)-c(10)=\int_{10}^{30}c'(Q)dQ$

$$=\int_{10}^{30}(4+0.25Q)dQ$$

$$=\left(4Q+\frac{1}{8}Q^{2}\right)\Big|_{10}^{30}$$

=180

（2）解：

$L' = R' - C' = -105Q + 50$

令$L' = 0$得$Q = 40. L''(40) = 1.25 < 0$

$\therefore$ 当$Q = 40$时L最大